

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

55e jaargang
1979/1980
no. 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleine - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,–; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9[II], 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

Abonnementsprijs voor niet leden *f* 33,50. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. **Tel. 050-16 21 89.** Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Setvorming en wiskundeonderwijs

I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken

S. P. VAN 'T RIET

1 Inleiding

Dit is het eerste van een aantal artikelen die ik van plan ben te schrijven over het verschijnsel 'setvorming', speciaal bij het oplossen van wiskundige vraagstukken. Al vanaf het einde van de vorige eeuw is dit verschijnsel objekt van onderzoek in de Westeuropese psychologie. Droeg het daar de naam 'Einstellung', later is het verschijnsel ook een topic geworden van de Amerikaanse psychologie, nu onder de naam 'seteffect'. In het kader van mijn studie Cognitieve Psychologie aan de Vrije Universiteit te Amsterdam heb ik in het voorjaar van 1978 naar dit verschijnsel een onderzoek gedaan, met name op het terrein van het oplossen van wiskundige vraagstukken. Op dit onderzoek, dat de aanleiding vormt tot deze artikelen in Euclides, hoop ik in een latere aflevering terug te komen. In dit eerste artikel zal ik de begrippen 'setvorming', 'Einstellung' en 'rigiditeit' invoeren. Vervolgens wordt een onderzoeksinstrument besproken dat veel gebruikt is om het setverschijnsel te bestuderen. Daarna plaats ik een aantal kanttekeningen bij de waarde die men het setverschijnsel moet toekennen. De lezer zal het meest geïnteresseerd zijn in de konsekwenties die theorieën en onderzoek op het gebied van setvorming kunnen hebben voor de konkrete praktijk van het wiskunde-onderwijs. Ook aan dat probleem hoop ik in een slotartikel aandacht te kunnen besteden.

2 Setvorming: Einstellung en rigiditeit

De begrippen waar het in dit artikel om gaat, zal ik invoeren met behulp van een aantal voorbeelden.

1 In een tweede klas vwo maakte ik eens het volgende mee.

Een leerling had enige sommen gemaakt, waarbij het antwoord steeds een wortelvorm had, b.v. $\sqrt{7{,}3}$. Deze wortel zocht hij op in een tabel alvorens aan de volgende som te beginnen. Op een bepaald moment kreeg hij het antwoord $\sqrt{1}$. Verontrust riep hij mij te hulp met de opmerking dat de som niet uitkwam, want $\sqrt{1}$ was niet te vinden in zijn tabel!

Dit voorbeeld nu vertoont alle kenmerken van wat we in de leer- en denkpsychologie een 'set' noemen: De leerling heeft in een aantal opvolgende opgaven een bepaalde methode van oplossen toegepast (wortelgetallen benaderen met behulp van een tabel) en is zo gefixeerd op die methode, dat zijn

direkte ervaring ermee hem verhindert in een van de volgende opgaven van deze methode af te stappen, zelfs als het antwoord heel gemakkelijk anders te bepalen is. De set, dit is het vastzitten aan een bepaalde oplossingsmethode, leidt hier zelfs tot wat we *rigiditeit* noemen: De leerling verkeert erdoor in een impasse, waar hij niet op eigen kracht uitkomt. Mijn antwoord aan hem was: 'Weet je dan niet wat $\sqrt{1}$ is?' Deze vraag leek de set te doorbreken, want na enig aandachtig inspekteren van $\sqrt{1}$ klaarde zijn gezicht op en riep hij uit: 'O ja, één natuurlijk!' Wie denkt dat dit een domme of weinig gemotiveerde leerling betrof, vergist zich: Het was een van mijn intelligentste en ijverigste leerlingen.

2 Vrijwel alle leerboeken behandelen terecht bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen eerst het ontbinden in faktoren en later de abc-formule. Men ontmoet nogal eens leerlingen die na de behandeling van de abc-formule alle kwadratische vergelijkingen met die methode trachten op te lossen, zelfs zeer eenvoudige vergelijkingen als $x^2 + 3x = 0$. Bij navraag blijkt dit meestal geen bewuste keuze voor een universele, algoritmische oplossing, maar een gevolg van het maken van vele sommen die ononderbroken met de abc-formule moesten worden opgelost. De leerling ontwikkelt dus een set op de abc-formule en blijkt niet de flexibiliteit te bezitten over te stappen op het veel eenvoudiger ontbinden in faktoren. We kunnen hier echter moeilijk van rigiditeit spreken, daar de abc-formule de leerling niet in een impasse brengt. In dit geval spreken we van een *Einstellung*: De leerling ziet niet dat het vraagstuk eenvoudiger is op te lossen en werkt door met een ingewikkelde methode, die echter wel tot goede resultaten leidt.

We zien hier een belangrijk onderscheid tussen Einstellung en rigiditeit. Bij Einstellung werkt de leerling door met methode A, terwijl er een eenvoudiger methode B is, die hij wel kent, maar waarvan hij de bruikbaarheid tengevolge van het veelvuldig werken met A niet meer ziet. Het doorwerken met A brengt hem niet in moeilijkheden. Anders is dit bij rigiditeit, waar het voorafgaande gebruik van methode A de leerling verhindert een eenvoudiger methode B te vinden, die hij wel kent, terwijl hij met A het probleem niet meer kan oplossen. Beide verschijnselen zullen we nu opvatten als aspekten van *setvorming*. Het verband tussen Einstellung en rigiditeit laat zich, zoals uit het bovenstaande blijkt, als volgt omschrijven: Rigiditeit is het onvermogen een Einstellung te overwinnen.

Alvorens Einstellung en rigiditeit nauwkeuriger te definiëren geef ik nog twee voorbeelden van aanverwante verschijnselen, die echter beide enigszins afwijken van wat we tot hier toe met Einstellung en rigiditeit hebben aangeduid.

3 In Moderne Wiskunde (Deel 7 voor vwo, 3e druk, p. 19) treffen we de volgende opdracht aan:

Vul in:

a. ${}^{2}\log{}^{3} = a \Leftrightarrow .. = ..$, dus $2^{{}^{2}\log 3} = \ldots$

b. $9^{{}^{3}\log 5} = (3^{..})^{{}^{3}\log 5} = 3^{.. \times {}^{3}\log 5} = 3^{{}^{3}\log ..} = \ldots.$

c. Bereken:

1. $5^{^5\log 10}$	3. $49^{^7\log 3}$	5. $3^{^2\log \frac{1}{4}}$
2. $(\frac{1}{2})^{^{\frac{1}{2}}\log 2\frac{1}{2}}$	4. $(\sqrt{5})^{^5\log 16}$	6. $(\frac{1}{6})^{^{\sqrt{6}}\log \frac{1}{2}}$

Tot en met c. 4. moet in alle opgaven de stap $g^{^g\log x} = x$ gedaan worden. Bij opgave c. 5. lukt dit echter niet meer. Het grondtal 3 is eventueel als een macht van 2 te schrijven, maar dit lost het probleem niet op. Mijn ervaring was dat vele leerlingen, tot de intelligentste toe, bij deze opdracht om hulp vroegen. Zij hadden in de voorgaande opgaven een set ontwikkeld en verkeerden in een impasse, waar zij niet op eigen kracht uitkwamen. De eenvoudige oplossing $3^{^2\log\frac{1}{4}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ vereiste een doorbreking van de set op $g^{^g\log x} = x$. Dit is dus een voorbeeld van rigiditeit. Het setgedrag vertoont in deze opdracht echter een opvallende evolutie. Wordt aanvankelijk eenvoudig opgelost met $g^{^g\log x} = x$ (c. 1. en c. 2.), gaandeweg moet deze stap uitgesteld worden, waarbij men eerst een vorm moet vinden van waaruit deze stap genomen kan worden (c. 3. en c. 4.). De rigiditeit bestaat hier dus uit twee elementen: De stap $g^{^g\log x} = x$ lukt niet, maar ook het vinden van een vorm van waaruit deze stap mogelijk is, lukt niet. Deze gekompliceerde opbouw van de set zou wel eens zijn hardnekkigheid kunnen verklaren. Vandaar de rigiditeit bij vele leerlingen.

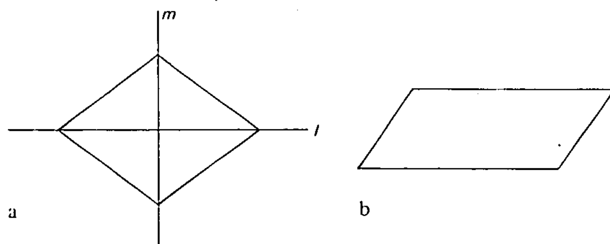
4 Kemme (1978) geeft een interessant voorbeeld van een setverschijnsel, dat min of meer tussen Einstellung en rigiditeit inligt. Studenten van een lerarenopleiding maken de volgende twee opgaven:

A Een figuur in het vlak heeft twee loodrechte assen van symmetrie. Bewijs dat de figuur ook puntsymmetrisch is.

B Als een vlakke figuur puntsymmetrisch is, zijn er dan ook twee onderling loodrechte spiegelassen?

De oplossing van vraagstuk A luidt: $R_l(F) = F \wedge R_m(F) = F \Rightarrow R(F) = R_l \circ R_m(F) = R_l(F) = F$. In figuur 1a is een bijbehorend voorbeeld afgebeeld. In de oplossing staat R_l voor een spiegeling in de lijn l en R voor een puntspiegeling. Bijna alle studenten gaven deze oplossing.

Anders lag dit bij vraagstuk B. De ene helft van de studenten gaf de oplossing: Natuurlijk, want iedere puntspiegeling kan geschreven worden als een kombinatie van twee lijnspiegelingen in loodrechte assen. De andere helft van de studenten gaf figuur 1b als tegenvoorbeeld.



Figuur 1. Een ruit heeft twee loodrechte assen van symmetrie en is dus puntsymmetrisch (a); een parallellogram is puntsymmetrisch, maar hoeft niet twee loodrechte assen van symmetrie te hebben (b).

We zien hier bij de eerste helft van de studenten een set, niet op een bepaalde oplossingsmethode, maar op een denknivo, namelijk het denknivo van de formele, abstrakte bewijsvoering. De eenvoudige beantwoording van vraag B op het nivo van konkrete voorbeelden krijgen zij niet in het vizier. Echter ervaren zij bij het geven van hun oplossing waarschijnlijk geen impasse: Ze lossen het vraagstuk op, maar zien niet dat hun oplossing verkeerd is. Vandaar dat ik stelde dat het hier gaat om iets dat tussen Einstellung en rigiditeit in ligt. Waar het mij in dit voorbeeld evenwel om begonnen is, is dat setvorming in het wiskundige denken niet alleen een zaak is van het gebruiken van een oplossingsmethode op een bepaald denknivo, maar dat het verschijnsel zich ook voordoet in veel algemener zin, namelijk ten aanzien van de flexibiliteit waarmee men van het ene naar het andere nivo van wiskundig denken weet over te springen. Met deze laatste problematiek zal ik mij nu verder niet bezig houden.

3 De Einstellung- of E-test

Voordat ik een instrument bespreek waarmee het seteffekt onderzocht kan worden, zal ik eerst de begrippen Einstellung en rigiditeit nader definiëren. Die definities zijn dan al toegespitst op mijn verdere onderzoek. Ze sluiten aan bij de voorbeelden 1 en 2 uit paragraaf 2. De voorbeelden 3 en 4 uit die paragraaf laten zien dat er ook andere, meer algemene definities van deze begrippen mogelijk zijn. Maar de verschijnselen waar het mij om begonnen is, worden nu eenmaal onderzocht met behulp van bepaalde onderzoeksinstrumenten. Men doet er nu goed aan bij de begripsdefiniëring en theorievorming terdege rekening te houden met de beperkingen waaraan de instrumenten onderhevig zijn. Mijn definities van Einstellung en rigiditeit zijn daarom zo geformuleerd dat ze nauw aansluiten bij een bepaalde onderzoeksopzet.

Definitie 1: Een persoon verkeert in een toestand van *Einstellung* als hij/zij in een aantal van n opvolgende situaties de reaktie X verricht heeft en in de $(n + 1)$ste situatie S eveneens reageert met reaktie X, terwijl er een reaktie Y bestaat, behorend tot het gedragspotentieel van die persoon, die in de situatie S efficiënter is dan de reaktie X; deze grotere efficiëntie moet hierin tot uiting komen, dat de proefpersoon de reaktie Y bij voorkeur verricht zou hebben als de n voorafgaande situaties ontbroken hadden.

Definitie 2: Een persoon verkeert in een toestand van *rigiditeit* als hij/zij in een aantal van n opvolgende situaties de reaktie X verricht heeft en in de $(n + 1)$ste situatie S, waarin de reaktie X niet adekwaat meer is, geen van de reakties Y verricht, die wel adekwaat zijn in S en tevens tot het gedragspotentieel van de persoon behoren; dat deze reakties Y tot het gedragspotentieel van de persoon behoren, moet hierin tot uiting komen, dat de persoon een reaktie Y wel verricht zou hebben als de n voorafgaande situaties ontbroken hadden.

Een onderzoeksinstrument dat geheel aansluit bij deze beide definities is de Einstellungtest of E-test van Luchins (1942). De E-test is opgebouwd uit een aantal aritmetische problemen, zogenaamde kannenproblemen. Bij een kannenprobleem worden de leerling (in het vervolg steeds proefpersoon genoemd)

vier getallen A, B, C en D gegeven, die inhouden voorstellen van respektievelijke kannen, b.v. $A = 20$, $B = 59$, $C = 4$ en $D = 31$. Daarnaast bestaat er een denkbeeldige kontainer met onbeperkte hoeveelheid vloeistof. De opdracht luidt nu om met behulp van de kannen A, B en C zo veel vloeistof uit de kontainer af te meten als nodig is om kan D precies te vullen. Overtollige vloeistof mag daarbij worden weggegooid. In ons voorbeeld moet de proefpersoon dus ontdekken dat dit mogelijk is door eerst kan B te vullen, daaruit de inhoud van kan A weg te gieten en vervolgens nog eens tweemaal de inhoud van kan C uit kan B te verwijderen. Het komt er op neer dat de proefpersoon een lineaire kombinatie van de getallen A, B en C vindt, waarmee het getal D berekend kan worden Hier: $B - A - 2C = D$.

Tabel 1 De taken van de E-test: Instruktieprobleem (I), setproblemen (S), kritische problemen (K), extinktieprobleem (E).

	Probleem	Inhoud van de kannen (in liters) A	B	C	D	Regel om het probleem op te lossen: $D =$
I	1	29	3		20	$A - 3B$
S	2	21	127	3	100	$B - A - 2C$
	3	14	163	25	99	$B - A - 2C$
	4	18	43	10	5	$B - A - 2C$
	5	9	42	6	21	$B - A - 2C$
	6	20	59	4	31	$B - A - 2C$
K	7	23	49	3	20	$B - A - 2C$ of $A - C$
	8	15	39	3	18	$B - A - 2C$ of $A + C$
E	9	28	76	3	25	$A - C$
K	10	18	48	4	22	$B - A - 2C$ of $A + C$
	11	14	36	8	6	$B - A - 2C$ of $A - C$

In Tabel 1 is de gehele E-test schematisch weergegeven. Eerst wordt de proefpersonen een instruktieprobleem voorgelegd, dat opgelost wordt met de regel $A - 3B = D$. Tevens wordt hiermee gedemonstreerd dat niet noodzakelijk alle drie de getallen A, B en C gebruikt hoeven te worden. Dan volgen vijf zogenaamde *setproblemen*. Dit zijn trainingsproblemen die de bedoeling hebben de set te vormen. De eenvoudigste oplossing voor al deze problemen is de regel $B - A - 2C = D$. De proefpersonen moeten deze regel zelf ontdekken. Zodra dit gebeurd is, gaan zij in het algemeen de volgende problemen er onmiddellijk mee te lijf. Dan is de set gevormd. Na deze setproblemen volgen er twee *kritische problemen*. Deze kunnen opgelost worden zowel met de regel $B - A - 2C = D$, als met een veel eenvoudiger regel, b.v. $A + C = D$. Op

deze twee problemen kan de proefpersoon dus Einstellung vertonen door de regel uit de setproblemen te blijven gebruiken. Stapt de proefpersoon echter over op de eenvoudiger regel dan is er sprake van doorbreking van de set. Na de kritische problemen volgt een *extinktieprobleem*. Dit is een probleem waarbij de regel uit de setproblemen niet adekwaat meer is. Het extinktieprobleem kan evenwel opgelost worden met een eenvoudige regel als $A - C = D$. Op dit probleem kan de proefpersoon rigiditeit vertonen, doordat hij blijft werken met de regel uit de setproblemen en als gevolg daarvan niet tot een oplossing komt. Na het extinktieprobleem volgen gewoonlijk nog twee kritische problemen. Deze test wordt meestal klassikaal afgenomen. De proefleider legt met behulp van het instruktieprobleem de proefpersonen uit hoe de problemen opgelost moeten worden. Vervolgens wordt om de $2\frac{1}{2}$ minuut een nieuw probleem op het bord geschreven, waarbij de proefpersonen het werken aan het voorgaande probleem moeten staken. De proefpersonen lossen de problemen op met behulp van pen en papier.
Bij het gebruik van de resultaten van deze E-test doet zich de volgende moeilijkheid voor. Er zijn altijd wel proefpersonen die falen de setproblemen op te lossen. Zij vormen dus geen set. Daarom gaat men bij de analyse van de resultaten alleen uit van de scores van die proefpersonen, die tenminste de laatste twee setproblemen hebben opgelost met de $B - A - 2C$-regel. Luchins en Luchins (1959, p. 110) melden nu, dat van 1039 in hun analyse betrokken proefpersonen 83% Einstellung vertoonde op de kritische problemen, d.w.z. door bleef werken met de regel $B - A - 2C = D$.
Voorts vertoonde 64% rigiditeit op het extinktieprobleem, d.w.z. faalde het extinktieprobleem op te lossen. In kontrast daarmee stonden de resultaten van 970 vergelijkbare proefpersonen die uitsluitend de kritische problemen en het extinktieprobleem kregen op te lossen. Op de kritische problemen gebruikte slechts 1% van hen de regel $B - A - 2C = D$, terwijl slechts 5% faalde het extinktieprobleem op te lossen. Deze verschillen zijn statistisch hoogst signifikant. We kunnen hieruit konkluderen dat we in de E-test een geschikt instrument bezitten om de verschijnselen Einstellung en rigiditeit nader te onderzoeken.
Met behulp van de E-test zijn in het verleden verschillende onderzoekingen gedaan met de bedoeling faktoren op te sporen, die het seteffekt beïnvloeden. Een aantal van die onderzoekingen zal ik in een volgend artikel bespreken. Tot slot van dit artikel wil ik enkele kanttekeningen maken bij de waarde die men aan de verschijnselen Einstellung en rigiditeit moet hechten.

4 Waardering van Einstellung en rigiditeit

Om te beginnen wil ik er op attenderen in de begrippen Einstellung en rigiditeit geen persoonlijkheidskenmerken te zien. Dat wil dus zeggen dat iemand die op de kritische problemen van de E-test Einstellung en op het extinktieprobleem rigiditeit vertoont, niet gekarakteriseerd mag worden als een rigide persoonlijkheid. In de eerste plaats is de E-test geen instrument om eigenschappen van personen te meten. Er zijn slechts twee (desnoods vier) kritische pro-

blemen en er is slechts één extinktieprobleem. Een test die met enige betrouwbaarheid iets wil zeggen over een persoon, moet veel langer zijn en moet bovendien bestaan uit items die onafhankelijk van elkaar beantwoord kunnen worden. Aan beide voorwaarden voldoet de E-test geenszins. De E-test is uitsluitend geschikt om iets te meten aan een groep proefpersonen. Vandaar ook dat de uitslag van de test een percentage is. Men kan dus met de E-test groepen proefpersonen vergelijken, maar niet twee afzonderlijke proefpersonen.
In de tweede plaats hebben vele onderzoekers aangetoond dat rigiditeit gezien moet worden als een vorm van gedrag (een specifieke reaktie in een specifieke situatie) en niet als een algemene persoonlijkheidstrek (zie b.v. Foster, Vinacke en Digman, 1955). De E-test brengt de proefpersoon in de zeer speciale situatie van een bepaald aritmetisch probleem. Uit de reaktie van de proefpersoon in die situatie is nauwelijks een zinvolle konklusie te trekken over zijn persoon in het algemeen. Wie dat toch wil, zal veel meer en andersoortiger informatie over hem moeten inwinnen. Dit wil aan de andere kant niet zeggen, dat er geen relatie zou bestaan tussen Einstellung en rigiditeit enerzijds en persoonlijkheidskenmerken anderzijds. Maar deze relatie is tamelijk ingewikkeld.
De uitslag van de E-test is dus een groepsscore. Ook zal later blijken dat deze score afhankelijk is van allerlei faktoren die weinig of niets te maken hebben met de persoonlijkheid van de proefpersonen, maar wel met b.v. de wijze waarop we het onderwijs inrichten.
Wat nu de waardering van Einstellung en rigiditeit als verschijnsel in een groep van proefpersonen betreft: Luchins en Luchins (1950) stellen dat er ten aanzien van Einstellung onderscheiden moet worden in drie mogelijkheden: (1) De setregel (b.v. $B - A - 2C = D$) wordt ontdekt en bewust gegeneraliseerd van probleem naar probleem; (2) Het setgedrag is gevolg van een mechanisering van het gedrag; (3) Aanvankelijk wordt het setgedrag bewust gegeneraliseerd naar het volgende probleem, doch later wordt het een mechanisch reageren. Nu schijnt mogelijkheid 1 tot de uitzonderingen te behoren, zodat Einstellung vrijwel altijd als een blinde mechanisering van het gedrag moet worden opgevat. Dit mechanische karakter van het gedrag openbaart zich speciaal bij het falen op het extinktieprobleem. Luchins (1942) spreekt in dit verband van 'a mechanized state of mind, a blind attitude towards problems'.

De meeste onderzoekers waarderen Einstellung dan ook in negatieve zin. Einstellung wordt gezien als een gedachteloos toepassen van een regel, zonder zich af te vragen of die regel effektief is in de gegeven omstandigheden. Luchins meende dat de gebruikelijke methoden van het rekenonderwijs, die erg de nadruk legden op training en drill, hiervoor verantwoordelijk zouden zijn. Hij stelde dat het niet de gewoonte was problemen toe te voegen die andere oplossingsprocedures vroegen dan de zojuist geleerde. Daardoor leerde de leerling niet te diskrimineren tussen situaties waarin verschillende oplossingsmethoden gebruikt moesten worden. Luchins en Luchins (1950) drukken het gevolg hiervan zeer plastisch uit: 'Our schools may be concentrating so much on having the child master the habits, that the habits are mastering the child.' Deze kritiek op de training- en drillmethoden in het onderwijs van de jaren vijftig en daarvoor is vrij algemeen, ook voor het wiskundeonderwijs (zie

b.v. Johnson en Rising, 1972, p. 9). Toch lijkt hiermee niet het laatste woord gezegd.
Van der Geer (1957, p. 68) merkt op, dat er geen reden is het seteffekt uitsluitend negatief te beoordelen. Als voorbeeld geeft hij het gebruik van het decimale stelsel in onze kultuur, waardoor we niet gemakkelijk kunnen overstappen op het binaire stelsel, ook niet in situaties waarin dit laatste efficiënter is. Dit voorbeeld van een macro-methode doet enigszins gekunsteld aan in vergelijking met de micro-methode van de regel $B - A - 2C = D$ op de E-test. Waar het echter om gaat, is een set te beschouwen binnen het geheel van doelstellingen waarbinnen hij moet funktioneren. Wat de E-test betreft is het duidelijk dat als de set tijdens de eerste twee setproblemen wordt opgebouwd, hij het oplossen van de laatste drie setproblemen kan bevorderen. De set is dus niet altijd een negatieve wijze van funktioneren. Integendeel. Levitt en Zelen (1953) hebben aangetoond dat de set op de $B - A - 2C$-regel zelfs het oplossen van de kritische problemen bespoedigt. Weliswaar kost het rekenen meer tijd dan bij het gebruik van de eenvoudiger $A - C$-regel, maar er is geen tijd meer nodig voor het inspekteren van de aangeboden getallen. Als we de snelheid waarmee de problemen opgelost moeten worden als kriterium nemen, dan is de setoplossing dus zeker niet minder effektief.
Naar mijn eigen mening gaat het bij het seteffekt niet zo zeer om een door het onderwijs aangeleerde attitude, hoewel een bepaalde inrichting van het onderwijs het seteffekt wel in de hand kan werken, als wel om een fundamenteel kenmerk van menselijk leren en denken. De automatisering die de mens als van nature verwerft ten aanzien van herhaaldelijk uit te voeren handelingen, verwerft hij ook ten aanzien van herhaaldelijk uit te voeren mentale operaties. Dit kan uiterst effektief zijn. De werking van een set wordt pas negatief in een situatie waarin het setgedrag niet meer beantwoordt aan de doelstellingen die het individu ermee nastreeft. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het extinktieprobleem. De Einstellung gaat dan over in rigiditeit. Alle onderzoekers zijn het er over eens dat de werking van de set dan negatief beoordeeld moet worden. Maar in het geval van zogenaamde kritische situaties (zoals de kritische problemen van de E-test) vereist mijns inziens de beoordeling van het setgedrag een nauwkeurige analyse van doelstellingen.

Ik zou echter nog een stap verder willen gaan en aantonen dat setgedrag in sommige gevallen zelfs een positieve beoordeling verdient. Daarvoor verwijs ik naar voorbeeld 3 uit paragraaf 2. Zoals we reeds zagen wordt er in de opgaven c. 1. t/m c. 4. een oplossing opgebouwd die in c. 3. en c. 4. uit drie stappen bestaat, namelijk eerst het grondtal van de macht gelijk maken aan het grondtal van de logaritme, vervolgens het toepassen van $p \cdot {}^{g}\log a = {}^{g}\log a^{p}$ en tenslotte de stap $g^{{}^{g}\log x} = x$. Door nu in de opgaven c. 1. en c. 2. een set aan te brengen op de regel $g^{{}^{g}\log x} = x$ is het mogelijk de komplexere oplossing van de opgaven c. 3. en c. 4. sneller op te bouwen. Het streven naar toepassing van de setregel wordt zo een belangrijke determinant voor het opbouwen van een uit verschillende stappen bestaande oplossing. De leerling die de oplossing van c. 1. en c. 2. niet generaliseert naar c. 3. zou bij c. 3. wel eens in een impasse kunnen raken, niet wetend in welke richting de eerste stap van de oplossing gedaan moet worden. Als deze analyse juist is, dan is hiermee aangetoond dat het positief

dan wel negatief waarderen van setmatig, min of meer mechanisch gedrag afhankelijk is van de leerdoelen die met dit gedrag worden nagestreefd.
Waar het nu naar mijn inzicht voor het onderwijs op aankomt, is een nauwkeurige analyse van de leerdoelen en de leerstof. In al die gevallen waarin men setmatig gedrag van leerlingen wenst te voorkomen, zal men in de leerstof in ieder geval een fase moeten inbouwen. waarin de voornaamste doelstelling is de leerlingen te leren in problemen van verschillende aard steeds de effektiefste oplossingsmethode te gebruiken. Dat dit eenvoudiger gezegd is dan gedaan. hoop ik in een later artikel te bespreken.

5 Tenslotte

In dit artikel heb ik de begrippen Einstellung en rigiditeit ingevoerd als twee aspekten van setvorming. Hoe men Einstellung ook waardeert, rigiditeit kan men nimmer toejuichen. En Einstellung is het doorgangshuis naar rigiditeit. Vandaar dat het zinvol is zich met beide verschijnselen bezig te houden. In het volgende artikel zal ik enkele faktoren behandelen die op de vorming van een set van invloed zijn.
Lezers die waardevolle reakties op dit of een van de volgende artikelen hebben. verzoek ik deze te zenden aan schrijver dezes, p.a. Technische Hogeschool, Julianalaan 132, Delft. Wellicht is het mogelijk enkele daarvan te verwerken in het slotartikel. Met name ook voorbeelden uit leerboeken (zie voorbeeld 3 in paragraaf 2) zijn van harte welkom.

Literatuur

Foster, N. C., Vinacke, W. E., Digman, J. M., *Flexibility and rigidity in a variety of problem situations*, J. abn. soc. Psychol., 1955, 50, p. 211-216.
Geer, J. P. van der, *A psychological study of problem-solving*, Leiden, 1957.
Johnson. D. A.. Rising. G. R.. *Guidelines for teaching mathematics*. Belmont. California. 1972. 2e druk.
Kemme, S., *Niveaus van wiskundig handelen en lerarenopleiding*, Euclides, 1978, 54, p. 8-14.
Levitt, E. E., Zelen, S. L., *The validity of the Einstellung test as a measure of rigidity*, J. abn. soc. Psychol., 1953, 48, p. 573-580.
Luchins. A. S.. *Mechanization in problem solving*. Psychol. Monogr.. 1942. 54. Whole No. 248.
Luchins, A. S., Luchins, E. H., *New experimental attempts at preventing mechanization in problem solving*, J. gen. Psychol., 1950, 42, p. 279-297. (Een uittreksel hiervan in: Wason, P. C., Johnson-Laird, P. N., *Thinking and reasoning*, Pinguin Books, 1968).
Luchins, A. S., Luchins, E. H., *Rigidity of behavior*, University of Oregon Books, 1959.
Moderne Wiskunde, Deel 7 voor vwo, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j., 3e druk.

Contextuele problemen

JAN DE LANGE

Er is op het moment duidelijk een neiging om de wiskunde meer en meer binnen bepaalde contexten te onderwijzen. In Euclides [1a] merkt Fred Goffree daar onder andere over op dat studenten op een Pedagogische Academie op de vraag:

'Waarom trekken we eigenlijk steeds af in de staartdeling?'

het antwoord aanvankelijk schuldig blijven.
Tot één van de studenten op het idee komt om de delingsopdracht in een reële verdelingssituatie een konkrete betekenis te geven:

'Je bent met zesentwintig verenigingen en je mag drieduizendvierhonderdvijfenveertig (3445) kaartjes verdelen'.

Door deze *context* blijken de studenten zich ineens te realiseren wat de stappen in de staartdeling betekenen.
Wiskundige problemen worden reeds lang in schoolboeken met een tekst omkleed:

Een handelaar koopt:
12 boormachines à *f* 99,50 = *f* ....
8 boormachines à *f* 162,00 = *f* ....
6 boormachines à *f* 214,75 = *f* ....
Hij moet betalen *f* ....

Alhoewel het hier gaat om niet-wiskundige zaken (boormachines) kun je hier nauwelijks van context spreken: de boormachines spelen geen enkele rol. Als deze opgave in het Russisch vertaald zou worden, zou u hem nog steeds kunnen oplossen.

Een ander voorbeeld waarin misschien sprake is van context, is:

De som van een getal en zijn omgekeerde is $2\frac{1}{30}$.
Welk getal is dat?

Zulke opgaven zaten altijd aan het eind van een serie opgaven: ze waren moeilijk, die *ingeklede* vergelijkingen en de vorm waarin deze wiskundige opgave was gegoten werd alleen maar als hinderlijk ervaren. Bovendien was het zo dat je eerst een serie 'kale' sommen moest maken, waarna bij de laatste 'ingeklede' opgaven je kans moest zien het verhaaltje weer als een 'normale' wiskunde-opgave te schrijven.

Dit soort 'ingeklede' opgaven is in allerlei variaties nog wel degelijk aan te treffen. Vaak noemen we ze dan 'toepassingen'. Een eigentijds voorbeeld:

> De groeifaktor van een bakteriesoort is gelijk aan 6 (per tijdseenheid).
> Op het tijdstip 0 zijn er 4 bakteriën.
> Bereken het tijdstip waarop er 100 bakteriën zijn.

Beperken we ons tot de wiskundige context alleen:

$$4 \cdot 6^x = 100.$$

Waarom vraag je dat laatste niet zonder meer? Het antwoord zou kunnen zijn dat je de leerlingen ervan bewust wilt maken dat de problemen, die je op wilt lossen met behulp van de wiskunde. niet altijd op je afkomen als keurige vergelijkingen.
Het 'vertalen' zou met name voor zogenaamde A-leerlingen wel eens een erg belangrijke aktiviteit kunnen zijn. Bovendien is het voor leerlingen soms een verrassing om te zien dat geheel verschillende contexten (althans ogenschijnlijk) in feite qua wiskunde hetzelfde zijn:

> Het rentepercentage over een jaar is gelijk aan 8%. Op het tijdstip 0 wordt er een bedrag van *f* 4000,— gestort.
> Op welk tijdstip is het bedrag aangegroeid tot *f* 5000,—?

is:

$$4000 \cdot 1{,}08^x = 5000.$$

Zodra je echter in of met een bepaalde context werkt wordt het wel zaak dat je aandacht schenkt aan het '*taalaspect*'.
De meeste leerlingen hebben een grondige hekel aan 'ingeklede' problemen, en bovendien lezen ze vaak oppervlakkig. Het is dus zaak een zo mogelijk ietwat smeuïge context te bedenken die bovendien helder is. Smeuïg, om te motiveren, helder om niet te veel taalproblemen op te roepen. In een later stadium mag de context best wat extra storende faktoren bezitten, en zou je wel wat irrelevante gegevens kunnen opnemen. Maar dit lijkt meer iets voor gevorderden.

Uiteindelijk kwam bovenstaand economisch groeiprobleempje als volgt in het boekje 'Exponenten en Logaritmen' [2a].

> Het motorrijwiel kent tegen het eind van de 70'er jaren een bloeiperiode.

Jan en alleman wil er een hebben. George ook. Hij heeft ƒ4000,— gespaard maar heeft z'n oog laten vallen op een Jawa van ƒ5000,—.
Hoe lang moet hij wachten? Maak een grafiek.

Op deze manier gesteld is de analogie met het bakterieprobleempje ineens veel minder duidelijk.
Opmerkelijk is misschien dat bij experimenten de leerlingen het aanzienlijk prettiger vonden om in een biologische context te werken dan in een economische, zelfs in klassen waar overwegend A-leerlingen zaten.

Bij dit soort contextgebruik is ongeveer duidelijk wat er aan de hand is: wiskundig gezien vraag je niets nieuws, en vaak zelfs eenvoudiger dingen dan welke ze vlak daarvoor gehad hebben. Nieuw is de aktiviteit 'vertalen' of 'matematiseren' zoals Adrie Treffers het in zijn proefschrift noemt [3a]. En over het nut daarvan hebben we het al even gehad. In feite waren dit nog steeds opgaven zoals:

Je bent met 26 verenigingen en je mag 3445 kaartjes verdelen.

Met dit verschil, dat studenten deze context zelf bedachten om een betekenis (de oorspronkelijke) te kunnen geven aan een routinehandeling, de staartdeling.
Persoonlijk zou ik de totnogtoe gegeven voorbeelden willen vangen onder de naam:

Contexten van de eerste soort.

Waarbij ik er heel goed in kan komen als u bij de boormachines zou willen spreken van:

Contexten van de nulde soort.

We gaan nu verder, op zoek naar wat u al vermoedde: contexten van de tweede soort. Wat dacht u van de volgende opgave: [2b] (zie blz. 53 en 54).

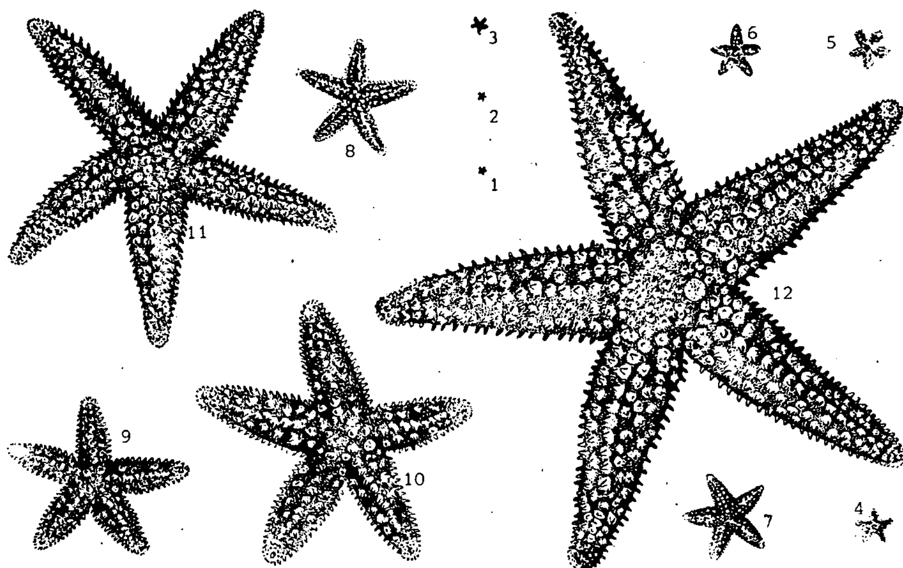
Hier is duidelijk meer aan de hand. Het probleem zou eigenlijk samengevat kunnen worden met:

Je ziet hier een zeester in twaalf fasen van z'n groei.
Is er gedurende enige periode sprake van exponentiële groei?

In deze vorm werd het voor leerlingen van 4 vwo te moeilijk geacht. Dus wordt de oplossing wat voorgestruktureerd. Dat neemt niet weg dat hier meer aktiviteiten nodig zijn dan alleen 'vertalen' en 'het wiskunde-probleem oplossen'.

Allereerst valt op dat er wordt uitgegaan van het echte dier, zij het dat we het met foto's moeten doen. Verder is een punt van diskussie wat nu wel een

Zeesterren

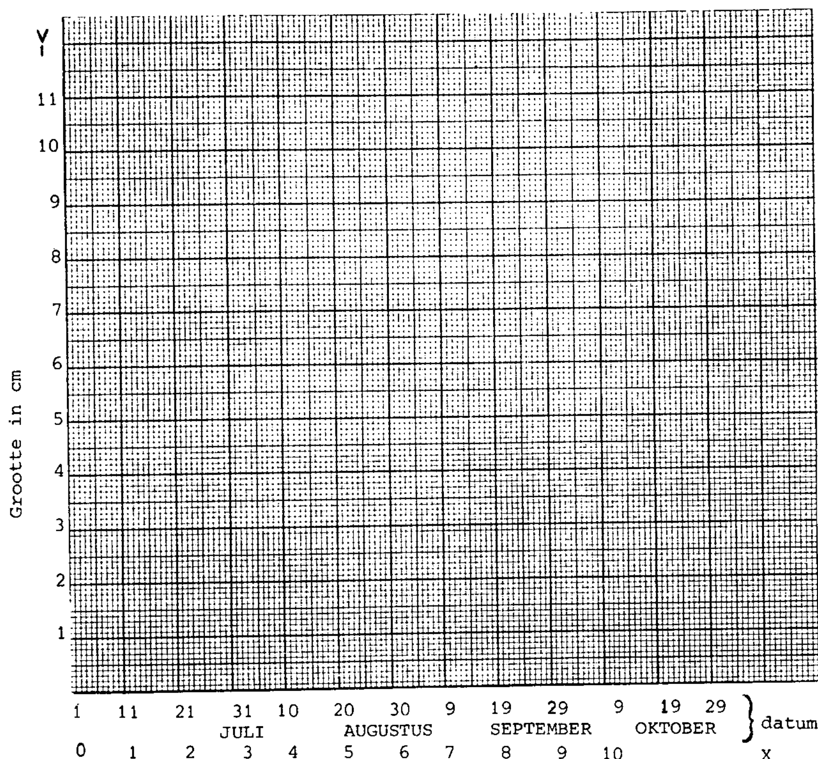


Je ziet op bijgaande plaat een zeester tijdens de groei, op 12 momenten is er een foto genomen. We zullen die groei eens wat verder onderzoeken, en bekijken of er sprake is van exponentiële groei. Meet van alle 12 foto's de lengte van een arm van de ster (vanuit het midden van de ster) in mm nauwkeurig. Vermenigvuldig dit met 2 en we hebben een redelijke maat voor de afmeting van de ster. (waarom)?
Zet deze afmetingen in onderstaande tabel:

STER n°	*DATUM*	*GROOTTE*
1	*3 juli*	
2	*5 juli*	
3	*7 juli*	
4	*15 juli*	
5	*16 juli*	
6	*18 juli*	
7	*26 juli*	
8	*2 aug.*	
9	*18 aug.*	
10	*12 sep.*	
11	*26 sep.*	
12	*19 okt.*	

Zeesterren

a - Maak een puntengrafiek van de groei op onderstaand roosterpapier.



Teken in dezelfde figuur de grafieken van:

$f : x \rightarrow (1{,}5)^x - 1$ op $[0{,}4]$ en:

$g : x \rightarrow (1{,}25)^x$ op $[0{,}10]$

op de gebruikelijke manier, zodat 10 dagen langs de x -as overeenkomen met één eenheid.
De punten van f(x) zijn eenvoudig te berekenen, die van g(x) ook, met een rekenmachientje. Vraag anders de funktiewaarden aan je leraar.

b - Gedurende welke periode van de groei valt de groei van de zeester redelijk te benaderen door f(x)?
En gedurende welke gedeelte door g(x)?

c - Enig idee wat de groeifunktie is van de *oppervlakte* van de zeester?

d - Overigens is de funktie f niet zuiver exponentieel.
Waarom niet?

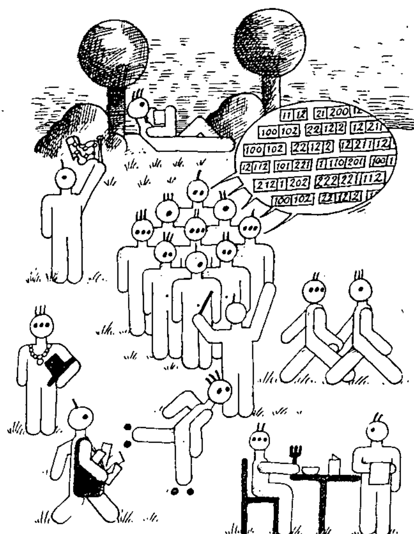
goede 'maat' is om de grootte van de zeesterren weer te geven. Eén arm meten? Welke dan? Of allemaal?.
Een probleem voor veel leerlingen is dat de meetdata niet steeds even ver van elkaar liggen: zij zijn geneigd om de centimeter een kruisje in te tekenen. Terwijl in werkelijkheid op de eerste centimeter al drie kruisjes getekend moeten worden, en verder op zijn er centimeter brede intervallen waarin geen enkel meetpunt valt.
Dat in dit geval de x-as een tijdas is, en langs de y-as de grootte van de sterren staat aangeduid is voor veel leerlingen die jarenlang niets dan x-as en y-as met dezelfde lengteëenheden zijn gewend een probleem. dat nog groter wordt als de verdeling niet is gegeven (in tegenstelling tot dit geval).
Tenslotte noemen we nog het feit dat er een diskussie zal ontstaan over het al of niet redelijk zijn van een benadering. De ene leerling vindt de kromme $g: x \rightarrow (1.25)^x$ de groei vanaf 1 augustus best aardig benaderen. maar een ander is heel wat minder onder de indruk: 'de zeester houdt zich helemaal niet aan de funktie'.
Er zijn natuurlijk nog meer aspekten aan deze opgave. Duidelijk lijkt wel dat de context hier een veel belangrijkere rol speelt dan in de voorbeelden 'van de eerste soort'. Zo is het zelfs denkbaar dat de biologiedocent er aanleiding inziet iets aan de groei van zeesterren te doen op een meer kwalitatieve manier. Of, zoals ik op een andere school meemaakte, houden leerlingen spreekbeurten over zulk soort opgaven.

Dergelijke 'tweede soort' contextproblemen worden sprekender als er meer problemen, eventueel naar keuze, worden aangeboden, waarbij we kunnen onderscheiden:

- je kunt diverse contexten hebben, met dezelfde wiskundige inhoud b.v. exponentiële groei in de economie, biologie, aardrijkskunde enz.
- maar je kunt ook één context nemen waarin je verschillende wiskundige onderwerpen tegenkomt.
  Een voorbeeld daarvan is b.v. het IOWO-pakket 'de Reis om de wereld in 80 dagen' [4], waarin het bekende verhaal van Jules Verne de context levert waarbinnen allerlei wiskundige (en aardrijkskundige) handelingen plaats vinden.
- een mengvorm is natuurlijk ook mogelijk. Je kan b.v. het verschijnsel 'GROEI' heel goed als centraal thema nemen voor de gehele behandeling van exponenten en logaritmen. [1b][2c]

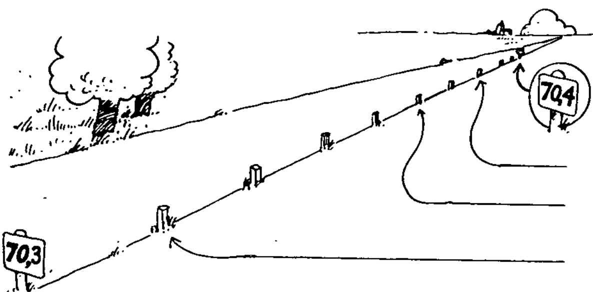
En daarmee zijn we op een 'derde soort' gebruik van context gekomen. Was het bij de 'eerste soort' en 'tweede soort' nog zo dat er duidelijk sprake was van een 'verwerkingsfase' of van 'toepassingen'. bij de 'derde soort' ligt dat heel anders. Je kunt namelijk een context ook gebruiken om nieuwe wiskundige begrippen al dan niet intuïtief aan te brengen. Het zal duidelijk zijn dat we met name bij deze 'derde soort' buitengewoon zorgvuldig moeten zijn. Immers, *alle* leerlingen zullen dit gedeelte moeten doorwerken, en liefst nog gemotiveerd worden ook. En of dat ook daadwerkelijk lukt is een vraag die (gedeeltelijk) slechts opgelost kan worden door experimenten. In ons land is met name

door het IOWO veel materiaal ontwikkeld waarin deze aanpak een voorname plaats inneemt. Zowel voor de basisschool, als voor het voortgezet onderwijs. De keuze van je context is een buitengewoon moeilijke zaak. Altijd op je gevoel en ervaring afgaan is zeker geen waterdichte garantie voor succes. Zo vinden we in 'Wiskobas doelgericht' [3b] een ervaring over het basisschoolprojekt 'Sproeteldam' [5].



sproeteldam

In 'Sproeteldam' wonen wonderlijke wezens. De burgemeester heeft drie sproeten en drie haren, de postbode één sproet en één haar. Alle bewoners verschillen van elkaar en hebben minstens één sproet en één haar en hoogstens drie sproeten en drie haren.
Over dit eigenaardige volkje worden allerlei vragen gesteld. De ontwerper stond zeer sceptisch tegenover de bruikbaarheid ervan in het onderwijs. Het was voor hem vooral een vraag of de leerlingen zich door de problematiek gegrepen zouden voelen en de aktiviteit als zinvol zouden ervaren.
Verrassend genoeg bleken de leerlingen zich zeer aangesproken te voelen door 'Sproeteldam'. De vraag is of leerlingen in het voortgezet onderwijs genoegen nemen met een dergelijke fantasiestad. Het lijkt aannemelijk dat, naarmate de leerlingen ouder worden, je meer en meer naar een reële context toe moet zoals b.v. de eerder genoemde zeesterren. Alhoewel, in Nepal zullen ze ook deze context niet erg zinvol vinden, misschien. Een ander aspekt willen we nog even noemen: in hoeverre is er in de hogere jaren van het voortgezet onderwijs nog plaats voor iets 'ludieks'?
Ook dat lijkt een probleem dat alleen door experimenten opgelost kan worden. De zeer reële context 'Autowegen' [6] doet het goed bij de introduktie van tijds-afstand grafieken (kilometer en hectometerpaaltjes, zie ook 'vierbaansboek' in [7]).

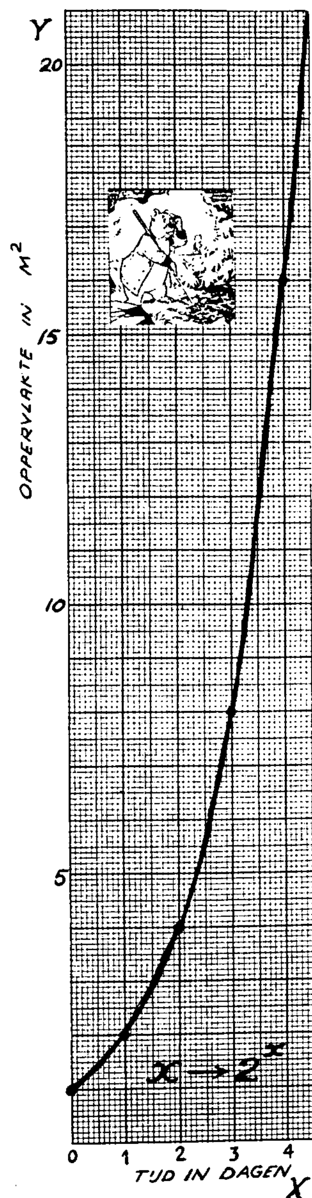


En een naam als dhr Zeur of dhr Korteweg wekt bij sommige leraren wel wat irritatie op, maar bij leerlingen nauwelijks.
Een soorgelijk verschijnsel zien we op een wat hoger niveau in het al eerder genoemde Exponenten en Logaritmen [2d].
Daar lopen we, tussen allerlei reële contexten over groei, ineens de welbekende heer van stand Ollie B. Bommel tegen het lijf. Over ludiek gesproken. Heer B. worstelt met een probleem dat buitengewoon veel lijkt op het bekende kroosjesprobleem. In feite is hier sprake van een dubbele context, of zo u wilt, een kwadratische context: het kroosjesprobleem, al een context voor het begrip exponentiële groei, is ingebouwd in een *bestaand* Bommelverhaal. Met als achterliggende gedachte dat dit de leerlingen wat prettiger zou voorkomen. Visueel win je alvast door de prachtige stripverhaaltekeningen. En ook hier geldt, op grond van enkele ervaringen tot op heden, dat, alhoewel enige leraren het verhaal wat te ludiek vinden, de meeste leerlingen dit gedeelte wel op prijs stellen.
Laten we als voorbeeld van een 'context van de derde soort' heer Bommel nemen bij de invoering van de logaritme. Een onderwerp dat door veel leerlingen als nogal mystiek wordt ervaren, en waarbij weinig begrip toch tot redelijke resultaten kan leiden.

Bommels vijver groeit in hoog tempo vol volgens de bijgaande grafiek (die de leerlingen al zelf enige malen hebben getekend in een eerder stadium).
Uit de grafiek is af te lezen dat er 10 m^2 planten zijn na 3,3 dag. Zonder grafiek kun je dan het antwoord geven op de vraag: 'Wanneer is er 20 m^2 planten?' Immers de 'groeifaktor' is 2 (gegeven), dus in één dag verdubbelt de oppervlakte. Dus na 4.3 dag is er 20 m^2. Het is opvallend om te zien hoe hinderlijk je eigen 'contextloze' kennis van logaritmen hier kan zijn.
Ook enkele van de docenten die bij het uitproberen van dit boekje betrokken waren hadden 'hinder' van hun kennis, terwijl veel leerlingen het 'verdubbelen in één dag' onmiddellijk benutten. Het zal u nu niet meer verrassen dat er 40 m^2 planten zijn na 5,3 dag.

Vervolgens *spreken* we *af* dat:

${}^2\log 10$ is de tijd waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd, bij groeifaktor 2 (uitgaande van 1 m^2 op $t = 0$).



En we zagen al dat $^2\log 10 \approx 3{,}3$
$^2\log 20 \approx 4{,}3$
$^2\log 40 \approx 5{,}3$

Uit de context is onmiddellijk duidelijk dat moet gelden:
$^2\log 10 + 1 = {}^2\log 20$, want één dag nadat er 10 m^2 lag, is er 20 m^2.
Dit is niet 'ongeveer' waar, maar precies.

Volgens eerder gegeven afspraak is vanzelfsprekend: ${}^{2}\log 2 = 1$.
Maar dan is ook 'vanzelfsprekend' dat:

$${}^{2}\log 10 + {}^{2}\log 2 = {}^{2}\log 20.$$

Als je op dit moment vraagt wat de leerling denkt van:

$${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 4$$

zullen de meesten nu het juiste antwoord:

$${}^{2}\log 12$$

geven. Men is tenslotte algoritmisch ingesteld, en tot wetmatigheden besluit men vaak al te gauw op basis van één voorbeeld. Nu echter kunnen ze hun 'wet' beredeneren, zeker tot ${}^{2}\log 10 + {}^{2}\log 2 = {}^{2}\log 20$; terwijl ze ${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 4 = {}^{2}\log 12$ kunnen verifiëren aan de hand van de grafiek. Er zal echter nog een 'bewijs' van deze hoofdeigenschap van de logaritmen moeten volgen, liefst binnen dezelfde context.
Dat gebeurt dan ook:

> Een ander soort planten groeit wat langzamer. Bommel begint weer met 1 m^2. De groeifaktor weet hij niet. Die noemen we maar g.
> Na A dagen heeft de oppervlakte zich verdubbeld (er is dus 2 m^2).
> Na B dagen heeft de oppervlakte zich verdrievoudigd (er is dus 3 m^2).
> Tom Poes, schrander als altijd, weet nu al na hoeveel dagen er 6 m^2 zal zijn.
> En de meeste leerlingen ook. Waarmee in feite de hoofdeigenschap 'bewezen' is. (Immers, verzesvoudiging kost $A + B$ dagen. Dit 'vertaald' naar de wiskunde levert: ${}^{g}\log 2 + {}^{g}\log 3 = {}^{g}\log 6$).

U ziet, een context, en in dit geval een kruising tussen een reële en een fantasie-context, wordt gebruikt om nieuwe wiskundige begrippen te introduceren. Eerder noemden we dat al een context van de derde soort. Bij dit soort gebruik is er echter wel een gevaar aanwezig: het probleem kan zich voordoen dat een leerling niet meer van de context 'loskomt' en bij iedere keer dat hij een logaritme tegenkomt, aan heer Bommel denkt. Voor Maarten Toonder mag dit misschien voordelig zijn, voor de leerling zeker niet.
Er zijn minstens twee methoden aan te geven om dit te ondervangen:

- je geeft diverse contexten.
- je geeft opgaven zonder enige context.

Uit waarnemingen tijdens de lessen op diverse scholen blijkt dat de 'context-vasthoudendheid' van de leerlingen erg verschillend is.
De één 'begrijpt' – hopelijk mede door de context en niet door het 'domweg' herkennen van regeltjes – de zaak direkt zó goed, dat hij de context vrijwel

direkt loslaat. Of hij de zaak echt 'begrijpt' kan later getoetst worden aan de hand van opgaven met een context van de eerste of tweede soort.
De ander denkt vele bladzijden verder nog terug aan heer Bommel en wat de logaritme ook weer precies was (en waarom). Pas veel later laat deze leerling Bommel 'los'.

Het lijkt me verstandig het hier voor het moment bij te laten. Het woord 'context', viel mij op, ligt veel mensen vóór in de mond. Zeker ook bij mij. Tot iemand me vroeg wat we nu eigenlijk bedoelen met 'context' bij wiskundeboeken. Vanaf dat moment ben ik bij mezelf te rade gegaan wat voor mij persoonlijk 'context' betekent. En beschouwt u dit als een zeer voorlopig verslag van die eerste gedachtenronde.

Ik vat nog even samen:

(Contexten van de nulde soort:
wel tekst aanwezig van buiten wiskunde. maar volkomen irrelevant).

Contexten van de eerste soort:
wiskunde-opgave, waarbij eerst vertaling dient plaats te vinden naar wiskunde-taal.

Contexten van de tweede soort:
veel complexer probleem, waarin veel meer aktiviteiten van al of niet wiskundige aard.

Contexten van de derde soort:
context wordt gebruikt om nieuwe wiskundige begrippen aan te brengen.

Literatuurverwijzingen:

[1b] Fred Goffree, *Vakdidaktische notities*, Euclides 54e jrg. nr. 6, blz. 222.
[1b] idem; blz. 223.
[2a] Jan de Lange, *Exponenten en Logaritmen*, I.V.I.O., Lelystad, 1978, blz. 31.
[2b] idem; blz. 36/37.
[2c] idem.
[2d] idem: blz. 12 e.v.; blz. 51 e.v.
[3a] Adri Treffers, *Wiskobas doelgericht*, I.O.W.O., Utrecht, 1978, blz. 58.
[3b] idem; blz. 206.
[4] Martin Kindt.Theo van Leeuwen. Wim Sweers. *De reis om de wereld in 80 dagen*. I.V.I.O.. Lelystad, 1979.
[5] Adri Treffers, *Sproeteldam*, I.O.W.O., Utrecht, 1975.
[6] Martin Kindt, *Autowegen*, I.V.I.O., Lelystad, 1977.
[7] Wim Sweers (ed), *Leerplanontwikkeling onderweg*, I.O.W.O., Utrecht, 1977, blz. 31 e.v.

Over de auteur:

Jan de Lange, 26-8-1943, Doctoraal Wiskunde Leiden, na 10 jaar lesgeven op middelbaar en hoger niveau in binnen- en buitenland, sinds 1 augustus 1976 werkzaam als medewerker voor de bovenbouw aan het I.O.W.O.

Invullen – vervullen

*Feestrede 10 jaar Wiskobas, 1979**

H. FREUDENTHAL

Wiskobas is tien jaar oud. Tien jaar, dat is tegenwoordig al historie. Maar ik zal me niet aan historie bezondigen. Er zijn meer bevoegden om de historie van Wiskobas te schrijven, mensen die er van het eerste uur af aan bij waren en die zijn er ook in deze zaal nogal wat. Ik had natuurlijk dokumenten kunnen raadplegen, zoals een historikus betaamt die er immers niet bij geweest hoeft te zijn. Ik bedoel zoals je oude geschiedenis bestudeert. Ik heb het niet gedaan. Ik heb het niet willen doen. Geen historisch verhaal vertellen. Immers, Wiskobas is niet tien jaar oud, maar tien jaar jong.
Op 26 januari 1971 werd het IOWO opgericht – het is Wiskobas, subcie van de CMLW, geweest die er de stoot toe heeft gegeven. Nog eens van deze plaats de toenmalige staatssekretaris Grosheide van harte bedankt. Ik werd er hoogleraardirekteur van, maar was ik daardoor al een Wiskobasser? Wel, we hadden onze wekelijkse kadervorming, algemeen en later ook afzonderlijk van Wiskobas en Wiskivon. Het was praten. Niet in het luchtledige, maar om onderwijs te ontwikkelen, praten over ontwikkeld onderwijs dat beproefd zou worden en dat beproefd was. Eén keer beproefd, herzien en bepraat, een tweede keer beproefd en wederom herzien en bepraat, en wellicht nog een derde keer. Het was praten over ontwikkeltechnieken en strategieën, over toetsen, over media, over konferenties en werkgroepen
Was je hiermee al Wiskobasser? Nee, dat was ik pas toen ik begon om geregeld mee te gaan naar de ontwikkelschool, de Dr. W. Dreesschool in Arnhem. En dat meen ik, want dat is één van de grondslagen van Wiskobas – neem me niet kwalijk – van het IOWO in z'n geheel: Onderwijs ontwikkel je daar waar het gegeven wordt, samen met wie het geven en ontvangen (met gevers en ontvangers bedoel ik dan niet resp. leerkrachten en leerlingen, want als het goed onderwijs is, zijn beide partijen zowel gevers als ontvangers). Achter het buro kon je van alles verzinnen, maar onderwijs ontwikkel je in de klas.
Ik dacht toen dat ik nú Wiskobasser was. Maar in feite was ik het maar half. In Wiskobasvergaderingen werd er ook weleens over de PA gepraat. Naar wat ik daar hoorde, een vreemd soort instelling. Ze waren een leerplan voor de PA aan het ontwerpen en ik vroeg me in den gemoede af of dit ècht zo moest. Ik was inmiddels al in LHNO's en LEAO's gedoken, maar wat een PA was, daar had ik geen flauw benul van.
Toen besloot ik mee op te trekken naar Gorkum, naar de PA 'Juliana van Stolberg' met bijbehorende oefenscholen. Ik had gauw door, dat dit een helft

* Wegens plaatsgebrek bekort. Volledige versie bij het IOWO verkrijgbaar.

van Wiskobas was, die ik tot dan toe gemist had. Je kunt geen onderwijs voor de basisschool ontwikkelen los van het onderwijs ontwikkelen voor de PA, en vice versa, en PA-onderwijs ontwikkel je evenals basisonderwijs ter plaatse, mèt de leraren èn de studenten èn de kinderen van de oefenscholen.
Twee helften maken een heel. Maar die rekening gaat niet helemaal op. Ik ben nooit op een kleuterschool geweest, ook niet toen ik zelf nog kleuter was, evenmin als ooit op een KLOS. Niets op de wereld is volmaakt, ook niet mijn Wiskobasserschap.

In de jaren zestig was de COLO aan het studeren geweest hoe het moest in Nederland met de leerplanontwikkeling. Er zouden ILO's komen voor diverse vormingsgebieden. Met het IOWO was het dan vast begonnen. Maar de naam IOWO was ambitieuzer: ontwikkeling niet maar van leerplan, maar liefst van onderwijs. Een addertje onder het gras? Zeg maar een serpent. Zó lang! Trek er maar aan en het wordt hoe langer hoe langer. Hoe lang? Levenslang! Leerplan kun je ontwikkelen voor, zeg maar, klas 3 basisschool, cijferend vermenigvuldigen. Of vwo klas 5-6, kansrekening. Dat kan. Onderwijs, dat betekent: van 4-16 of 18 plus opleiding plus her- en bijscholing plus begeleiding plus toetsen plus wat er door media en uitgevers wordt verspreid. En dat 'plus' is er niet een van een optelsom. 'Alles hangt met alles samen', is gemakkelijk gezegd en een uitvlucht voor wie niet weet welke kant hij moet beginnen. Je kunt van dat geheel maar een klein gedeelte aan, maar die zenuwknopen moet je opzoeken en van hun onderlinge verbindingen profiteren. Dat is ontwikkeling van onderwijs, onderwijs als geheel.

Leerplan ontwikkelen, onderwijs ontwikkelen, hoe doe je dat? Wie had er enige notie van? Er bestaan ook nu nog geen opleidingen voor leerplanontwikkelaar. Wist iemand hoe zoiets moest? Wel, je kon het te weten komen hoe het mòest, want toen Wiskobas, toen IOWO begon, bestond er al een indrukwekkende literatuur over wat je noemt curriculum development – handboeken waar uiteengezet werd hoe het *moest*.
Hoe het moest? Nee, je kon kiezen tussen diverse – modellen noemen ze dat. En volgens een van die modellen *moest* het dan. Alleen stond er in die handboeken niet bij of het ook *kon*. Want onderwijskundige modellen verzin je achter het buro, ver van het onderwijs. Ze in te vullen, laat je aan anderen over. 'Invullen' – woord en idee zijn een reuze vondst geweest in de onderwijskunde: de ene verzint lege modellen, de ander vult ze in. Iets om nog op terug te komen.
Hebben we ons toen van de curriculum theorieën niets aangetrokken? Er zijn er onder ons geweest, die dat soort literatuur diepgaand bestudeerden. 's-Avonds thuis als ik boven een boek zat te geeuwen, was mijn geregeld ekskuus: ik lees onderwijskunde.
Leerplanontwikkeling, hoe moest dit? Een paar jaar doelstellingenonderzoek, algemene doelstellingen en daaruit 'afgeleid' een hele hierarchie tot je aan de geoperationaliseerde toekomt, netjes voorzien van nivoetiketten, volgens de taksonomie van Bloom. Zo ontstaat een katalogus van leerdoelen en als die af is, komt er een opiniepeiling: de katalogus opsturen aan duizenden adressen, die geacht worden kompetent te zijn om in elk van die duizenden hokjes een plus of min te plaatsen, en bovendien van zins zijn om dat dan ook daadwerkelijk te doen. Een volksstemming met een, naar te verwachten, bedroevend lage opkomst, grondslag voor het herzien van de katalogus van leerdoelen. Dan: een schrijversgroep inhuren – invullers, die de leerdoelen in geschreven onderwijs vertalen –, een groep scholen en leerkrachten – invullers, die het geschre-

vene in gegeven onderwijs vertalen –, nagezeten door een groep toetsenbakkers die van elk leerdoel moeten nagaan of het, zeg voor 90%, is bereikt. En dan begint de ellende opnieuw, tenzij (zoals redelijkwijs te verwachten) de subsidiebron al onderweg is opgedroogd.
Wiskobas koos geen van die modellen om in te vullen. Je werd erom voor onwetenschappelijk uitgekreten. Want dat heette wetenschap: de compendia van curriculum development. Daar stond immers in hoe het moest. Helaas niet of en hoe het kon. Dat hoefde ook niet. Het waren immers maar modellen.
Wiskobas had er andere ideeën over. Ik heb die al geschetst. Geen leerplan- maar onderwijsontwikkeling, een samenhangend geheel. Onderwijsontwikkeling niet achter het buro, maar *in* het veld en *met respons* uit het veld. U zit hier vandaag weer om Uw bijdrage te leveren. Het mag eigenlijk niet, want je hoort twee kompetenties te scheiden: één om lege modellen te *maken*, dat is wetenschap, en één om ze *in te vullen*, dat is ontwikkeling. Zo hoort het volgens de leer, dus wat Wiskobas deed, was onbehoorlijk.
Onderwijsontwikkeling in het veld, ja. Maar je gaat het veld niet met en als een onbeschreven blad in. Je wilt wiskundeonderwijs ontwikkelen en dan moet je een idee hebben van wat *wiskunde* is, van wat *onderwijs* is en wat *wiskunde-onderwijs* is. Of veeleer: hoort te zijn. Want je moet keuzen doen, en keuzen doe je vanuit een filosofie, vanuit een kijk op de wereld, mens en maatschappij. Laat ik U niet met abstrakties vervelen. Je filosofie ontvouw je niet met woorden, maar met daden. En die daden zijn in casu het ontwerp dat je produceert. Wiskobas heeft er tien jaar de tijd voor gehad. De voorbeelden staan in Uw boekenkast en liggen hier op tafel, voorbeelden die duidelijker taal spreken dan fraaie woorden ooit kunnen doen. Die zijn ook onmisbaar, als je maar steeds de daad bij het woord weet te voegen.

Tien jaar is een hele tijd. Het is een leertijd geweest voor alle betrokkenen. Want – ik zei het U al – wat wisten zij die toen begonnen van leerplanontwikkeling af? Niets, want aan wat er op dit gebied toen officieel te koop was, hadden ze geen boodschap – ook niet aan wat er toen elders ontwikkeld werd, als in strijd zijnde met een filosofie, die uitgaat van het kind en zijn belevingswereld. Je moest van meet af aan beginnen.
Het begon met vingeroefeningen, van de enkeling en van het kollektief, met op het laatste de nadruk. Want vooral dat moest Wiskobas leren: samen iets tot stand brengen. En daar hoort bij: kritiek oefenen, aanvaarden, verwerken. Interne en eksterne kritiek, en vooral het oor goed te luisteren leggen naar de zwijgende, maar daadwerkelijke kritiek in het veld, waar je je gedachtenspinsels beproeft.
Zijn er ook fouten gemaakt? Een onzinnige vraag. Natuurlijk! Had Wiskobas het beter kunnen doen? Zeker, als je toen alles had geweten wat je nu weet. Een belachelijk antwoord. Als je op zesjarige leeftijd wist wat je met achttien jaar zou weten, hoefde je niet naar school te gaan. Een vergelijking, waar je je de essentie goed van moet realiseren. Onderwijs ontwikkelen is school gaan. Net als de ontwikkeling van een individu is onderwijsontwikkeling een leerproces van een team, van talrijke teams, van scholen en scholengemeenschappen, van de hele maatschappij – een leerproces dat van binnen en buiten wordt gestuurd. Laten we eraan toevoegen: een langdurig leerproces, waar iedereen leerling en leermeester is.
Van wat je zelf hebt geleerd, wil je anderen laten profiteren. Was het maar zo gemakkelijk! 'Niet het wiel opnieuw willen uitvinden', is tegenwoordig een geliefd gezegde.

Ik beweer niet, dat Wiskobas het wiel heeft uitgevonden. Maar het stemt toch tot droefenis als tien jaar ervaringen zo weinig zoden zetten aan de dijk van onderwijsontwikkeling in het algemeen. Het gaat maar door in wat zich onderwijswetenschap noemt, met het produceren van lege modellen, in te vullen door anderen. 'Het aanreiken van modellen', is een geijkte term. Lege modellen achter het buro geproduceerd, worden aangereikt. Aan wie? Aan de ontwikkelaar, de systeembegeleider, die er ook niets mee weet te doen dan het verder aan te reiken aan de man of vrouw in het veld, die er nog minder mee kan beginnen. Hele modellen van hoe je aanreikkursussen organiseert voor aanreikers, die zelf aanreikkursussen moeten organiseren. Lege modellen van onderwijs en differentiatie, veelal door drie letters aangeduid, het ABC-model of het XYZ-model of het IPI-model of het ALE-model of het PIL-model, soms ook wat spraakzamer, zoals mastery learning.
Onderwijs zonder inhoud. Invullen?, daar hebben de ontwerpers geen verstand van. De lege dozen vullen, dat laten ze aan anderen over, dat vragen ze van anderen: levend geïntegreerd onderwijs in moten hakken, die in hun dozen passen. Als het onderwijs zich niet bij hun Procustesbed schikt, dan des te erger voor het onderwijs. Ze zouden langzamerhand geleerd moeten hebben, dat het zo niet kan. Maar nee, als tien van die lege modellen hun falen hebben bewezen, is er alle aanleiding om subsidie te vragen en te krijgen voor een elfde. Het is een zichzelf bestendigende tak van bedrijvigheid die groeit en bloeit dankzij zijn mislukkingen – dit systeem van systeemscheiding tussen het ontwerpen van lege modellen en het invullen ervan.
De titel van mijn feestrede luidt: **Invullen-vervullen**.
Tegenover de filosofie van het invullen heeft Wiskobas – IOWO die van het vervullen geplaatst. vervullen van wat? Van beloftes, van verwachtingen? Ja ook, een beetje. Maar vooral vervullen van een *taak*. Een taak bepaald door een visie op wiskunde, op onderwijs en op wiskundeonderwijs. Vervullen betekent dat je zelf verantwoordelijkheid draagt, dat je op je neemt wat je aan kunt. Niet: hier heb je een model, vul het maar in met onderwijs, want daar heb ik geen kaas van gegeten. Maar: laten we samen een stuk onderwijs scheppen. Een model ja, maar dan één om model te staan voor andere, geen magere hein waar je nog vlees en bloed moet invullen. We zitten opgescheept met een systeem dat niet leert van zijn eigen mislukkingen, laat staan iets van de tien jaren ervaring waar mijn feestrede op doelt.
Ik geef toe dat het verschijnsel dat ik hier signaleer internationaal is. Onze lege dozen zijn veelal buitenlandse import, en zeker geldt dit voor het *beginsel* van de lege modellen die je anderen laat invullen. De klacht dat het onderwijskundig onderzoek niets van betekenis produceert ten bate van het onderwijs, is allesbehalve origineel. Ze is door meer gezaghebbenden dan ik ben met meer klem geuit.
Het verschijnsel is internationaal. Nederland zit mee in de boot. Maar de strijd tegen de lege dozen is ook internationaal, hoewel in Nederland speciaal bemoeilijkt door twee faktoren.
De ene is de zogenaamde professionele verzuiling, een modern gildesysteem. De verzorgingsstruktuur van het onderwijs is netjes opgedeeld in onderzoek, ontwikkeling, begeleiding en scholing, met nog heel wat onderverdelingen. En geen mag op het terrein van de ander komen. Tenminste, zo hoort het volgens de theorie. De vermaning om in deze versplinterde struktuur samen te werken, hoort er ook bij. In de praktijk komt het neer op bijelkaar op de schoot gaan zitten – kijk maar rond in het jaarbeursgebouw in Utrecht en in welbekende hotels in die stad en provincie, om te zien hoe manuren en mankracht verspild

worden. De samenwerking ontaardt in medeplichtigheid.
Dit brengt ons tot punt twee. Nederland is klein en dichtbevolkt. De bewegingsvrijheid wordt belemmerd door de kans anderen op hun tenen te trappen. Kritiek is uit den boze. Middelmatigheid staat hoog in de koers. Je mag dus kiezen: of het zwarte schaap zijn of medeplichtig zijn.
Ik kies voor kritiek. Niet op personen die er niets aan kunnen doen, maar op een systeem dat bekwamen (en onbekwamen) veroordeelt tot middelmatigheid en beuzelarij.
Wiskobassers noch IOWO-ers in het algemeen zijn onderwijskundige wonderkinderen. Ze zijn doodgewone mensen, van precies hetzelfde slag als je overàl in het onderwijs tegenkomt – geen haar beter of slechter. Ze hebben alleen, als enkeling en met z'n allen, hun werk anders gezien dan onderwijskundige dogma's voorschrijven. Niet invullen, maar vervullen. Vervullen: een taak *in* het veld, *met* het veld, *voor* het veld.
Aan het IOWO is telkens verweten dat het niet in de verzorgingsstruktuur past. Iets om trots op te zijn, dacht ik. Het IOWO heeft niet meegedaan aan het op elkaars schoot zitten, aan het verkavelen van taken, aan het invullen. Het IOWO heeft naar kwaliteit gestreefd, al hebben ze het wiel niet uitgevonden. Wel hebben ze ondervonden dat er geen wiel is of er wordt een spaak tussen gestoken. Als er iets is dat je tien jaar geleden niet wist en dat je hebt geleerd, dan is het dit geweest. Vooral in een wiel dat niet in een struktuur past.
Het IOWO is niet uniek in de wereld. Op veel plaatsen elders wordt er net zo hard geworsteld tegen de systeemdwang van de lege dozen en de middelmatigheid. Wat het IOWO geproduceerd heeft, mag wel uniek heten en staat als zodanig internationaal bekend, beter dan wat ook van het Nederlands onderwijs. Niet voor niets staan buitenlandse uitgevers te trappelen om het Wiskobasmateriaal integraal uit te geven.
Wat zal de toekomst brengen? Het Nederlandse onderwijs en zijn verzorgingsstruktuur heten pluriform te zijn. Betekent pluriformiteit lege dozen toelaten van verschillend formaat? Of is er een kans weggelegd voor fundamenteel afwijkende visies op onderwijsontwikkeling en onderzoek? Kan een pluriform systeem geen kwaliteit verdragen? Of zal er niet dure kwaliteit worden afgebroken met de absolute zekerheid dat er een duur niets voor in de plaats komt? Bij mijn afscheid in augustus 1976 heb ik optimistischer geluiden laten horen. Maar je bent nooit te oud om iets bij of af te leren. Ook na je afscheid. Invullen of vervullen? Wiskobas strijdt voor meer dan de wiskunde alleen. Wiskobas staat en valt voor wijder ideeën. Invullen of vervullen? Zolang die strijd niet is beslist, heeft Wiskobas zijn taak niet vervuld.

Grammatica van WOT

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN

1. In een vorig artikeltje (Wees contextbewust in WOT, Euclides blz. 7) werd de afkorting 'WOT' voor 'wiskundige omgangstaal' ten tonele gevoerd. In dat artikeltje hadden we het over 'context'. Het zal nu over heel wat anders gaan, nl. over de zinsbouw in WOT, d.w.z. over de grammatica.

2. De grammatica van een levende taal zit vol voetangels en klemmen. Wordt het ons in afgeronde vorm aangeboden zodat we het 'alleen maar even hoeven te leren'? Allerminst. Zou dan WOT, dat mengsel van woorden en formules, niet nog een graadje lastiger zijn?
We hoeven niet zo somber te zijn. Wat in WOT wezenlijk is, is grammaticaal erg eenvoudig. Maar zodra we proberen van WOT redelijk proza te maken, krijgen we met de hele grammatica van de natuurlijke taal te maken.

3. Bij dit laatste een voorbeeldje. Het zinnetje 'l halveert het lijnstuk AB' is ons wiskundig even lief als de geïnverteerde vorm (die bijv. in bijzinnen voorkomt) 'l het lijnstuk AB halveert' en even lief als de lijdende vorm 'het lijnstuk AB wordt door l gehalveerd'. We zullen doen of al deze zinnen hetzelfde zijn. Liever gezegd: we beschouwen een eenvoudige maar houterig klinkende taal WOT en daarbij relaties naar twee kanten: aan de ene kant naar fraai proza, aan de andere kant naar de door de tall aangeduide wiskundige zaken. De eerste relatie is hoofdzakelijk het terrein van taalkundigen, de tweede hoofdzakelijk van wiskundigen. We doen er verstandig aan ons voorlopig te beperken tot de tweede relatie. Dit wil niet zeggen dat die taalkundige kant vergeten mag worden. Er komen allerlei kwesties bij die juist voor het schoolonderwijs belangrijk zijn. Om een voorbeeld te noemen: ieder moet leren om de ontkenning van een ingewikkelde zin te bouwen en om ontkennende zinnen correct te interpreteren. Het zou geen kwaad kunnen in de wiskundeles taaloefeningen met wiskundig materiaal te houden!

4. Maar wat *is* WOT nu eigenlijk precies? Wat WOT van andere talen onderscheidt is dat *formules* (eventueel losse letters) als zinsdelen kunnen optreden, en zelfs als gehele zinnen. We zullen spreken over *formulaire* zinsdelen. Maar rekenen we alles wat er in een wiskundeboek staat tot WOT? Laat ons eens proberen een soort indeling te maken. We treffen aan:

a. *Kernzinnen*.
b. *Contextaangevende zinnen*.
c. *Definiërende zinnen*.
d. *Argumenterende zinnen*.
e. *Overige zinnen*.

De *kernzinnen* vormen de harde kern van WOT. Ze doen echte wiskundige uitspraken. Voorbeelden: '$a > b$', 'het snijpunt van l en m ligt binnen de cirkel C'. Over dit soort zinnen kan men een serieuze grammatica gaan beschrijven. Om een idee te geven welke zinnen we kernzinnen noemen, zeggen we dat het uitspraken zijn die in formules mogen voorkomen. Als we spreken over de verzameling van alle x die aan . . . voldoen, mag op de stippeltjes een kernzin staan. Hieruit zien we dat de volgende zin geen kernzin is: 'Daar $x > 5$ is $\log x > 0$ en dus $x \in V$'.
Contextaangevende zinnen zeggen dat er een letter wordt ingevoerd (bijv. 'laat k een geheel getal voorstellen') of een onderstelling wordt gemaakt (bijv. 'we onderstellen dat . . .', en op de stippeltjes komt de een of andere kernzin).
Definiërende zinnen voeren een nieuw symbool of een nieuw woordgebruik in, omschreven in termen van bestaande begrippen. Bijv.: 'we korten $\frac{1}{2}(a + b + + c + d)$ af tot s', 'een priemgetal is een geheel getal dat geen echte delers heeft'.
Argumenterende zinnen doen beweringen die met argumenten gestaafd worden. Bijv.: 'Door stelling 25 toe te passen op driehoek PQA zien we dat . . .' en op die stippeltjes komt er een kernzin.
Overige zinnen. Hieronder valt een grote hoeveelheid materiaal van zeer verscheiden aard. Sommige zinnen hebben tot doel aan te geven wat de schrijver van plan is ('Deze stelling zal in het volgende hoofdstuk een rol gaan spelen'). Er zijn zinnen die kernzinnen op vage wijze omschrijven ('Hetzelfde geldt voor driehoek PQR') of gehele stukken tekst vervangen ('een dergelijk bewijs kan voor het geval $p < 0$ gegeven worden'). Dan zijn er nog opgaven ('bereken q', 'bewijs dat $t > 3$'), soms in de vorm van een vraag ('Is $a + b > 0$?').

5. Met de rubriek 'overige zinnen' zullen we ons niet bezighouden. Laten we ze maar niet tot WOT rekenen, al bevatten ze dan ook vaak weer formulaire stukken of stukken die kernzinnen zijn. Ook de 'argumenterende zinnen' zullen we voorlopig buitensluiten. We kunnen ons op het standpunt stellen dat een zin als 'uit stelling 25 volgt $a < b$' moet worden vervangen door de kernzin '$a < b$' met een voetnoot die zegt dat dit uit stelling 25 volgt.

6. Over contextaangevende zinnen is in ons vorige stukje 'Wees contextbewust in WOT' het een en ander gezegd. Het is belangrijk daarvoor een goed spraakgebruik te hebben, maar grammaticale moeilijkheden komen er niet aan te pas.

7. Moeilijker zijn de definiërende zinnen. Hoe moet een definitie worden gebouwd. Mag je zomaar alles definiëren?
Merk eerst op dat definiërende zinnen er vaak als kernzinnen uitzien. Met 'Een ruit is een vierhoek' is geen definitie bedoeld, maar met 'Een ruit is een parallellogram waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan' misschien wèl. Het

is verstandig af te spreken dat definiërende zinnen duidelijk als zodanig herkenbaar moeten zijn (het voorplaatsen van de aankondiging 'definitie' is afdoende, maar er zijn ook andere middelen).

8. Wanneer we een groot aantal definities bekijken valt het op dat er verschillende soorten zijn. We onderscheiden er vier.
a. *Naamsdefinities*. Een nieuwe naam of een nieuw symbool wordt ingevoerd: 'Het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek ABC wordt het zwaartepunt van die driehoek genoemd'. De nieuwe naam is 'het zwaartepunt van driehoek ABC'. Het valt op dat er *parameters* A, B, C zijn. Later kan ook met andere letters P, Q, R de naam 'het zwaartepunt van driehoek PQR' worden gehanteerd. Men kan zeggen dat de definitie gegeven is in de context 'laat ABC een driehoek zijn'. (Nog lang kan ruzie gemaakt worden over de vraag of hier één dan wel drie variabelen zijn opgevoerd).
In dit voorbeeld bestond de naam uit een stel woorden, maar het kan evengoed een letter zijn (bijv. 'de halve omtrek van een cirkel met straal 1 stellen we door π voor'), eventueel met aangeplakte variabelen ('$x^2 - xy + y$ korten we af tot $f(x, y)$').
b. *Substantiefdefinitie*. Een nieuw substantief wordt ingevoerd (of aan een bekend substantief uit de 'volkstaal' wordt een wiskundige betekenis gegeven). Men kan woorden definiëren, zoals 'ruit', 'cirkel', maar ook een groep van meer woorden kan als substantief worden ingevoerd: 'kwadratische vorm', 'grote cirkel' (op een bol), 'loodlijn op m', 'deler van k'.
c. *Kernzindefinitie*. Hier wordt een kernzin (meestal met parameters) ingevoerd, die nog niet eerder betekenis had. Voorbeeld: 'We zeggen dat $a \equiv b \pmod m$ als $a - b$ deelbaar is door m'. De nieuwe kernzin is '$a \equiv b \pmod m$'. Een ander voorbeeld: 'We zeggen dat a en b onderling ondeelbaar zijn als . . .'. Hier is 'a en b zijn onderling ondeelbaar' de nieuwe kernzin.
d. *Adjectiefdefinitie*. Nu wordt een nieuw adjectief ingevoerd. 'Een geheel getal heet even wanneer het deelbaar is door 2'. Hierin is 'even' het nieuwe adjectief. Daardoor is bijv. het nieuwe substantief 'even getal' bruikbaar geworden zonder dat daar weer een definitie voor nodig is.

9. Zijn er geen andere typen van definities dan deze vier? En zijn deze vier echt verschillend? Dat is maar een kwestie van opvatting; zolang de taal niet keihard vastligt is het niet zo duidelijk. Men kan bijvoorbeeld volhouden dat adjectiefdefinities verkapte substantiefdefinities zijn: invoering van het adjectief 'even' dient eigelijk alleen maar om het substantief 'even getal' in te voeren, want ook de zin 'k is even' is met dat substantief te beschrijven. Waarom we dan de adjectiefdefinite afzonderlijk hebben genoemd? Omdat adjectieven zo gemakkelijk hanteerbaar en ook stapelbaar zijn ('gelijkbenige rechthoekige driehoek'). We zeggen ook gemakkelijker 'mijn fiets is groen' dan 'mijn fiets is een groenfiets'.

10. Het klassificeren van definities leidt ertoe dat we ook maar vier grammaticale categorieën hanteren:

a. Namen.
b. Substantieven.
c. Kernzinnen.
d. Adjectieven.

De grammatica kan nu heel eenvoudig worden, althans in vergelijking met gewone taalkundige grammatica. We behoeven niet te zeggen hoe een kernzin gebouwd is, want kernizinnen worden via definities ingevoerd en later eenvoudig herhaald, met namen ingevuld voor de parameters. We hebben ten aanzien van die gedefiniëerde zinnen alleen de plicht ervoor te zorgen dat ze duidelijk herkenbaar zijn, ook nog nadat voor de parameters langere namen zijn ingevuld. We laten ze meestal een beetje lopen als zinnen in de huis-tuin-en-keukentaal, dat heeft allerlei voordelen, maar een plicht is het niet. Als de zin geheel formulair is hebben we met gewone taal trouwens ook niets te maken!
Naast de mogelijkheid om via definities nieuwe kernzinnen te maken, zijn er nog een aantal regels (zie §14) die aangeven hoe uit aanwezige bestanddelen nieuwe zinnen kunnen worden gebouwd.

11. Kernzinnen vormen de harde kern van WOT, maar wie een wiskundeboek openslaat, komt heel weinig zinnen tegen die in hun geheel kernzinnen zijn. Voor een deel is dat gekomen doordat het lelijk gevonden werd om zinnen met een formule te beginnen. Daarom zet men vaak in het begin van een zin informatie over de afleiding. Soms is dat nogal inhoudloos: 'we zien nu dat . . .', 'we have . . .'. Dat zijn aanwensels van hetzelfde soort als 'met twee woorden spreken', 'het mooie handje geven'.

12. We zeiden al dat we niet hoeven te zeggen hoe kernzinnen eruit zien, want het zijn eenvoudig de zinnen die we in zinsdefinities believen te schrijven. Maar om precies dezelfde reden behoeven we ook niet te zeggen hoe namen, substantieven en adjectieven eruit zien. Alleen: deze onverschilligheid legt ons wèl de plicht op ervoor te zorgen dat bij definiërende zinnen duidelijk blijkt welk van de vier soorten definities bedoeld is.
Helemáál vrij om te definiëren wat we willen zijn we ook weer niet. We moeten denken aan de ontleedbaarheid: het moet van elk stukje WOT onomstotelijk vaststaan op wèlke definities het een en ander terug te voeren is. Dit maakt dat we niet mogen toestaan dat eenzelfde ding twee keer wordt gedefiniëerd, of dat er iets wordt gedefiniëerd dat via vastgelegde WOT-constructies al interpreteerbaar was. (Voorbeeld: je mag niet 'a is niet groter dan b' definiëren als je al eerder had gedefiniëerd wat 'a is groter dan b' betekent).

13. Discussies over een taal kunnen niet altijd in de taal zelf worden gehouden, daarvoor heeft men de zg. metataal. De taal waarin we WOT bespreken zullen we METAWOT noemen. Schrijvende in METAWOT zullen we de zinnen en zinsdelen uit WOT door letters voorstellen. Kernzinnen zullen we voorstellen door ζ, ζ_1, ζ_2, . . . , substantieven door β, β_1, β_2, . . . , adjectieven door θ, θ_1, θ_2, . . . , en namen door Latijnse letters.

In WOT zèlf is het heel gebruikelijk om letters (en langere formules) als namen te hebben, en in het deel van WOT dat men 'logica' noemt zijn ook kernzinnen letters of formules. Bij substantieven is zoiets niet gebruikelijk, maar WOT wordt bruikbaarder wanneer we het wèl gaan doen. (Er zijn sporen van aanwezig: algebraïci korten vaak lange substantieven af, bijv. 'commutatieve ring met eenheidselement' tot 'CRME'. En er is 'plat WOT' waarin men spreekt over 'een y' als men bedoeld 'een reëel getal' in een geval waarin y de voor de hand liggende letter is).
In METAWOT zullen we het teken : : gebruiken voor 'is een'. We schrijven bijv. ζ : : kernzin, β : : substantief, θ : : adjectief, $a + b$: : naam.

14. We geven nu een paar voorbeelden van taalregels.
(i) Als a : : naam en β : : substantief dan is

$$a \text{ is een } \beta \quad :: \quad \text{kernzin.} \tag{1}$$

We zullen zo'n kernzin een *typeringszin* noemen, en door $a : \beta$ voorstellen. Dus 3 : positief getal, π : reëel getal, enz. De formulering van (1) is oppervlakkig, want we willen $a : \beta$ alleen als kernzin toelaten wanneer er een substantief β_1 is waarbij al vaststaat dat $a : \beta_1$ en dat elke β een β_1 is.
(ii) Als β : : substantief dan is

de klasse van alle β's : : naam.

Laat ons het linkerlid door $\beta^\uparrow$ voorstellen. Dus $\mathbb{R} = (\text{reëel getal})^\uparrow$, enz.
De omgekeerde pijl kunnen we gebruiken om uit de klasse het substantief te maken, bijv. establishment$^\downarrow$ = lid van het establishment. We kunnen nu in plaats van $a : \beta$ ook schrijven $a \in \beta^\uparrow$ en in plaats van $a \in K$ ook $a : K^\downarrow$.Dit laatste maakt dat we met gemak substantieven in formules kunnen gebruiken. We hoeven niet eerst een letter voor de klasse in te voeren, maar kunnen met het substantief blijven werken. Voorbeeld:

$\forall_s$: parabool $\cdots$

en op de stippeltjes staat bijvoorbeeld dat de as van s loodrecht staat op de topraaklijn.
(iii) Als α : : substantief, en als de klasse $\alpha^\uparrow$ precies één element heeft, dan is

de α : : naam

(als α onzijdig is zeggen we natuurlijk 'het α'). Voorbeeld: de positieve wortel van $x^5 + x = 1$. Overigens ziet men hoe verwarrend WOT kan zijn, want veel namen die met 'de' beginnen zijn op andere wijze gevormd. In 'de som van a en b' is 'som van a en b' geen substantief! De naam 'de som van a en b' is in een definitie ingevoerd, en kan in WOT dan ook niet grammaticaal worden ontleed.

(iv) Als ζ : : kernzin dan is

niet ζ : : kernzin.

(v) Als ζ_1 : : kernzin en ζ_2 : : kernzin dan is

als ζ_1 dan ζ_2 : : kernzin.

15. In §14 deden we maar een greepje uit de taalregels. De meer interessante regels zijn degene waarbij gebonden variabelen een rol spelen, maar daar gaan we nu niet op in. Alleen merken we op dat het constructies zijn die in de gewone taal met dingen als betrekkelijke voornaamwoorden worden uitgedrukt.

16. Met onze notatie kunnen we nu heel snel zeggen wat contextaangevende zinnen zijn. Er zijn twee soorten. Als ζ : : kernzin dan is

Onderstel ζ

een contextaangevende zin. En als β : : substantief, en x een beschikbare letter, dan is

Zij x : β

een contextaangevende zin. Die kan ook geschreven worden als: 'laat x een β zijn'. Binnen de nu geopende context fungeert x als een naam.

17. In §2 spraken we al over het omwerken van WOT tot redelijk proza. Daarbij kunnen we dingen doen die we desgewenst ook wel tot taalregels van WOT zouden kunnen maken. Opvallend is de terminologie gekoppeld aan *bezit*. Als bijvoorbeeld eenmaal het substantief 'buigpunt van een algebraïsche kromme *K*' is ingevoerd, kan men later zonder verdere toelichting spreken over 'kromme met drie buigpunten', '*K* heeft een buigpunt', 'haar buigpunten' (O arme Nederlanders met hun eeuwige angst om het verkeerde geslacht te gebruiken!).

18. Het gangbare WOT heeft veel schoonheidsfouten. Denk aan de verwarrend vele verschillende constructies waarin het simpele woordje 'is' optreedt. En aan de vele constructies met onbepaald lidwoord. We moeten vaststellen dat 'een punt' in WOT niet als naam fungeert, maar als onderdeel van iets als een existentieuitspraak of universele uitspraak. Veel constructies met onbepaald lidwoord zijn alleen voor de goede verstaander duidelijk. Het zou verstandig zijn om WOT wat op te kalefateren. Wat oude constructies eruit, wat nieuwe erin, om zo tot een vlekkeloze taal te komen. Laten we een dergelijk schone taal WOT* noemen. Het is nog te vroeg om die helemaal vast te leggen, maar niet te vroeg om er eisen voor te formuleren: redelijk klinkend, gemakkelijk schrijf- en leesbaar, glashelder, vrij van dubbelzinnigheden. Zouden we dit ooit bereiken? Natuurlijk niet, daarvoor zijn die eisen te subjectief. Maar we zijn op de goede weg: het WOT van vandaag is duidelijk helderder dan dat van een eeuw

geleden. Jammer is alleen dat de wiskundige parvenu direct van 'plat WOT' overgegaan is naar 'bekakt WOT'. Dit laatste is gekenmerkt door overmatig gebruik van logische en verzamelingstheoretische notaties op plaatsen waar dat best gemist kan worden.
Voor onderwijsdoeleinden is het van groot belang aandacht te geven aan de vertaling van volkstaal naar correct WOT. Het bekakte WOT helpt daar niet veel bij. Als men op tijd een beetje energie in WOT had gestoken was die behoefte aan verzamelingstaal er misschien nooit gekomen!

Gefeliciteerd

Op 14 september is Fred Goffree, lid van de redaktie van EUCLIDES, gepromoveerd tot doctor in de sociale wetenschappen op een proefschrift, getiteld: Leren onderwijzen met wiskobas, onderwijsontwikkelingsonderzoek 'Wiskunde en Didaktiek' op de pedagogische akademie.
Een uitgebreide bespreking hopen wij in de loop van deze jaargang op te nemen.
Eén stelling (niet de laatste) willen wij u niet onthouden:
Het onderwijs in de statistiek, waar geen gebruik gemaakt mag worden van rekenmachientjes, is vergelijkbaar met schrijfonderwijs, waarbij het gebruik van een vulpen of balpen niet is toegestaan.
Wij wensen Fred van harte geluk met deze promotie.

De redaktie

De Internationale Wiskunde Olympiade 1979

Twee Nederlanders hebben een prijs behaald bij de 21e Internationale Wiskunde Olympiade 1979 te Londen. Freek Wiedijk uit Den Burg kreeg een tweede prijs, en Jan Koen Annot uit Veenendaal een derde prijs. Aan deze Olympiade namen 166 leerlingen van het V.W.O. uit 23 landen deel. De leerlingen kregen in twee zittingen van 4 uren in totaal 6 wiskundige vraagstukken voorgelegd. De wedstrijd vond plaats in het Westfield College van de University of London op 2 en 3 juli 1979. Elke deelnemer kon maximaal 40 punten behalen. De 8 deelnemers met 37-40 punten ontvingen een eerste prijs, de 32 scholieren met 29-36 punten een tweede, en de 42 deelnemers met 20-28 punten kregen een derde prijs. Een scholier uit Vietnam ontving een schoonheidsprijs voor zijn oplossing van opgave 3.
De resultaten van de Nederlandse deelnemers waren: Jan Koen Annot 22 punten, Harry Bruning 10 punten, Jos van der Bijl 17 punten, Hugo Cramer 18 punten, Carel Faber 11 punten, Payl Louis Iske 8 punten, Jan Luuk Roelfsema 11 punten en Freek Wiedijk 33 punten. In het officieuze landenklassement kwam Nederland met 130 punten op de 16e plaats. Dit klassement werd aangevoerd door de Sovjet Unie (267 punten), Roemenië (240 punten) en West Duitsland (235 punten).

maandag 2 juli 1979 beschikbare tijd: 4 uren

1 Gegeven zijn positieve gehele getallen p en q zo, dat

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bewijs dat p deelbaar is door 1979.

2 Gegeven is een prisma met de vijfhoeken $A_1A_2A_3A_4A_5$ en $B_1B_2B_3B_4B_5$ als boven- en ondervlak. Elke zijde van elk van de twee vijfhoeken en elk van de lijnstukken A_iB_j voor $i, j = 1, \ldots, 5$ is rood of groen gekleurd. Elke driehoek waarvan de hoekpunten ook hoekpunten zijn van de prisma en waarvan de zijden alledrie gekleurd zijn, heeft twee zijden van verschillende kleur.
Toon aan dat alle 10 zijden van boven- en ondervlak dezelfde kleur hebben.

3 In het vlak liggen twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2. A is een van de snijpunten. Twee punten P_1 en P_2 doorlopen de cirkels C_1 resp. C_2 in dezelfde omloopszin met constante snelheden. Zij beginnen tegelijkertijd in A en komen na één omloop ook weer gelijktijdig in A terug.
Bewijs dat er een vast punt P in het vlak is zo, dat P op elk tijdstip gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2.

dinsdag 3 juli 1979 beschikbare tijd: 4 uren

4 Gegeven zijn een punt P in een vlak π en een punt Q niet in π.
Bepaal alle punten R in π waarvoor het quotiënt $\frac{PQ + PR}{QR}$ maximaal is.

5 Bepaal alle reële getallen a waarvoor er niet-negatieve reële getallen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bestaan die voldoen aan de voorwaarden

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

6 A en E zijn diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten van een regelmatige achthoek. Een pion legt een weg af langs de hoekpunten van de achthoek. Hierbij kan hij telkens van een hoekpunt naar één van de twee aangrenzende hoekpunten springen. Elke weg begint in A en eindigt zodra de pion voor het eerst E bereikt. Het aantal verschillende wegen van precies n sprongen geeft men aan door a_n.
Bewijs dat voor elke $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2k-1} = 0, a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}), \text{ waarbij } x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}.$$

N.B.: een 'weg van precies n sprongen' is een rij hoekpunten $(P_0, \ldots, P_n)$ zo, dat:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;
(ii) voor iedere i, $0 \leqq i \leqq n - 1$, is P_i verschillend van E;
(iii) voor iedere i, $0 \leqq i \leqq n - 1$, zijn P_i en P_{i+1} aangrenzende hoekpunten.

Korrel

Setvorming?

In de volgende opgaven wordt aselect getrokken zonder teruglegging.

1 Lr Er zijn 8 groene en 5 rode knikkers. De eerste getrokken knikker is rood, de tweede groen, de derde rood, de vierde groen. Wat is de kans dat de vijfde weer rood is?
Ll Er zijn nog 6 groene en 3 rode knikkers over. De kans op een rode knikker is dus $\frac{3}{9}$.

2 Lr Er zijn 8 groene en 5 rode knikkers. Wat is de kans dat de vijfde getrokken knikker rood is?
Ll Dat hangt ervan af, wat de eerste 4 keer getrokken is. Het kan zijn dat er 4 rode knikkers getrokken zijn. De kans hierop is $\binom{5}{4}/\binom{13}{4}$. De kans dat de vijfde knikker dan rood is, is $\frac{1}{9}$. . . . En na veel gereken bleek de gevraagde kans $\frac{5}{13}$ te zijn.

3 Lr Er zijn 1 groene en 12 rode knikkers. Wat is de kans dat de vijfde of de zesde keer een groene knikker getrokken wordt?
Ll Ik vlieg er niet weer in. De kans dat de vijfde keer een groene knikker getrokken wordt, is $\frac{1}{13}$ en de zesde keer ook. In totaal dus $\frac{2}{13}$.

4 Lr Er zijn 3 groene en 10 rode knikkers. Wat is de kans dat de vijfde of de zesde keer een groene knikker getrokken wordt?
Ll Nu weet ik hoe het moet. De kans op de vijfde keer een groene is $\frac{3}{13}$ en de zesde keer ook. Dus $\frac{6}{13}$.

5 Lr Er zijn 3 groene en 10 rode knikkers. Wat is de kans dat de vijfde of de zesde keer een rode knikker getrokken wordt?
Ll Dat wordt $\frac{10}{13} + \frac{10}{13} = \frac{20}{13}$. Nee, dat kan natuurlijk niet. Dat moet je anders doen. Rood is niet groen. Dus de complementregel. Die geeft $1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin. Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

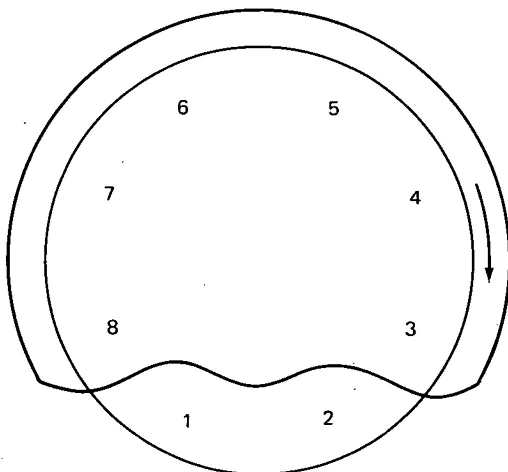
Opgaven

407. Als in een driehoek twee bissectrices gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig. Geef van deze stelling een bewijs waarbij niet gerekend wordt.

408. Jan en Marie zijn getrouwd. Ze gaan naar een feestje. Daar komen nog vier andere echtparen. Allen begroeten elkaar. Sommigen geven elkaar de hand, anderen groeten zonder een hand te geven. Geen enkel echtpaar geeft elkaar de hand. Na afloop van de begroetingen vraagt Jan alle anderen hoeveel handen ze gedrukt hebben. Hij krijgt negen verschillende antwoorden. Gevraagd wordt hoeveel handen Jan gedrukt heeft en hoeveel Marie.
(Meegedeeld door R. Troelstra.)

Oplossingen

405. In onderstaande figuur ziet men een schijf waarop de cijfers 1 tot en met 8 zijn aangebracht in deze cyclische volgorde. De schijf zit in een omhulsel, waardoor alleen de cijfers 1 en 2 zichtbaar zijn. Men mag de zichtbare cijfers verwisselen, één cijfer verder draaien in de richting van de pijl, de dan zichtbare cijfers (desgewenst) verwisselen enz. In minimaal hoeveel draaiingen bereikt men de eindvolgorde 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (cyclisch)?



Als de cijfers 1 tot en met 8 niet cyclisch gerangschikt zijn, kan men de omgekeerde volgorde bereiken door $7 + 6 + \ldots + 1 = 28$ verwisselingen (van twee naast elkaar gelegen cijfers).
Als de cijfers cyclisch gerangschikt zijn, kan men ze verdelen in twee groepen van 4 en beide groepen afzonderlijk doen overgaan in de omgekeerde volgorde. Daarvoor zijn nodig, volgens het voorgaande, $2(3 + 2 + 1) = 12$ verwisselingen.
Laten we nu eens proberen met behulp van ons toestel de volgorde van de cijfers 1, 2, 3, 4 om te keren en ook die van de cijfers 5, 6, 7, 8. Het cijfer 4 moet dan 3 keer met zijn linker buurman van plaats verwisselen. Als het cijfer 4 verwisseld is, zijn 7 draaiingen noodzakelijk om het weer te kunnen verwisselen. Hetzelfde geldt voor het cijfer 8. Het cijfer 8 kan voor het eerst verwisseld worden na 6 draaiingen. In totaal zouden dus $6 + 7 + 7 = 20$ draaiingen noodzakelijk zijn.
Dit aantal kan nog gereduceerd worden door de omkering van de volgorde niet toe te passen op

1, 2, 3, 4 en 5, 6, 7, 8, maar op 7, 8, 1, 2 en 3, 4, 5, 6. Omdat 6 voor het eerst in twee draaiingen minder bereikt wordt dan 8, zijn dan slechts 18 draaiingen noodzakelijk. Hieronder ziet u ze.
12345678, 21345678, 21435678, 21453678, 21456378, 21456387, 71456382, 17456382, 17546382, 17564382, 17564328, 87564321, 87654321.
De onderstreepte cijfers zijn verwisseld. In totaal is 7 keer gedraaid zonder dat twee cijfers verwisseld worden. In 18 draaiingen is dus inderdaad de eindstand bereikt.
Wie het leuk vindt, mag het ook nog eens proberen met een schijf die beide kanten op kan draaien in plaats van alleen volgens de pijl.

406. Een fabrikant wil van een of ander veelvlak een bouwplaat in de handel brengen met minimaal aantal plakrandjes. Welke strategie moet hij volgen?
Maak een graaf. De punten van de graaf stellen de zijvlakken van het veelvlak voor. Twee punten verbinden we in de gevallen waarin de zijvlakken door middel van een plakrandje aan elkaar bevestigd moeten worden.
Deze graaf moet samenhangend zijn. Hij kan geen cykel bevatten. Een samenhangende graaf zonder cykel die n punten bevat, bevat $n - 1$ lijnstukken. Men bewijst dit gemakkelijk door middel van volledige inductie. De fabrikant behoeft zich dus geen zorgen te maken wat de strategie betreft. Hij zal in elk geval $n - 1$ plakrandjes nodig hebben.

Boekbesprekingen

Grafentheorie. Stichting Mathematisch Centrum. Amsterdam 1967, 69 blz., *f* 9,– (bij afname van minstens 10 exemplaren: *f* 6,30 + portokosten).

Men kan met toestemming van de inspectie zelf een keuzeonderwerp voor wiskunde II kiezen. Met het oog op deze mogelijkheid is bovenstaand boekje geschreven. Het is samengesteld door G. Bakker-Plooijer (Stedelijke S.G. Hugo Grotius, Delft), M. R. Best (M.C.), W. J. F. Hertoghs (Lodewijk Makeblijde College, Rijswijk), F. J. Rondaij (Gemeentelijke school voor havo, Amsterdam), A. Schrijver (M.C.), J. M. Wijnbeek (Chr. S.G. Groen van Prinsterer, 's-Gravenhage). Als uitgangspunt voor de samenstelling is gekozen het alleraardigste boek R. J. Wilson, Introduction to graph theory, Longman Ltd., London, £ 1.95.
Het boekje bestaat uit vijf hoofdstukken. Het eerste geeft een algemene inleiding die natuurlijk begint met het Koningsberger bruggenprobleem. In hoofdstuk 2 komen speciale soorten grafen ter sprake, in het bijzonder euler- en hamiltongrafen. Hoofdstuk 3 behandelt de bomen, een met het oog op toepassingen belangrijk onderwerp. Het volgende hoofdstuk is al iets meer specialistisch. Het gaat over vlakke grafen. Onder welke voorwaarden is een graaf isomorf met een in een plat vlak gelegen graaf waarvan geen twee lijnen een inwendig punt gemeen hebben? Het laatste hoofdstuk gaat over kleuringen.
In 40 lesuren zal men niet de gehele stof kunnen behandelen. Het boekje biedt ruime mogelijkheden voor selectie. Belangstellende leerlingen kunnen zich verdiepen in het niet behandelde deel van het boek.
Het kan besteld worden bij de administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, 1091 AL Amsterdam.

P. G. J. Vredenduin

M. A. Arbib, *Computers en de cybernetische samenleving*, Academic Service, Den Haag 1978, 492 blz., *f* 40,–.

Er bestaat in deze tijd een behoefte aan goede leerboeken op het gebied van de wisselwerking tussen computers en samenleving. Computers zijn alledaagse verschijnselen geworden; de vormen waarin ze bestaan en hun vermogen variëren van de allergrootste rekenautomaten, zonder hetwelk bijvoorbeeld geen weersvoorspellingen op langere termijn mogelijk zijn, tot de allerkleinste chips met nog onontgonnen toepassingsmogelijkheden. Computers treden bijna overal op in de Westerse samenleving, bij wetenschap en cultuur, bij sport en recreatie. Het is dan ook van belang dat zoveel

mogelijk mensen weten wat een computer is, wat gemeenschappelijk is aan alle computers, hoe ze werken, wat ze kunnen en waar de grenzen van hun vermogen liggen; verder hoe ze de samenleving beïnvloeden en daarin de economie, de sociologie, de infrastructuur, de wetenschap en de cultuur. Het boek van Arbib is een uitstekende inleiding en een goed leerboek op dit gebied en het geeft antwoorden op een breed terrein dat zowel de structuur en werkwijze van computers omvat, als een grote scala van toepassingen. Dit laatste vooral daar waar we niet zouden verwachten van een computer gebruik te kunnen maken (opmerking van de auteur op blz. 87). In de eerste twee hoofdstukken wordt een elementair inzicht in de werking van een computer en de programmering ervan gegeven. Als middel hiertoe dient o.a. een eenvoudige robot die in een kamer heen en weer kan lopen en geïnstrueerd moet worden de kamer te verlaten, een direct aanspreekbaar probleem, vooral geschikt als een eerste kennismaking met problemen van programmering. Eveneens wordt de opzet en wijze van functioneren van een computer centrum getoond, gedeeltelijk met behulp van foto's. Op één ervan ontwaart men zowaar de schrijver zelf (blz. 26). In het laatste hoofdstuk 8 komt de schrijver in meer detail op de structuur van computers terug. Onder de wat misleidende titel 'Hoe werkt de hardware' wordt uiteengezet hoe bepaalde basisoperaties van een computer gecodeerd worden in de zgn. machinetaal. Men zal vergeefs naar schema's van electronische schakelingen zoeken; de rest van het achtste hoofdstuk gaat over het programmeren in machinetaal.
In de tussenliggende vijf hoofdstukken wordt een groot aantal onderwerpen besproken, variërend van gestructureerd programmeren en vertaler constructie tot de opslag van en toegang tot informatieverzamelingen. Maar ook onderwerpen die niet strikt tot de informatica behoren komen aan de orde. Ik noem hier alleen de bespreking van de cybernetica zelf, problemen rond de wereldmodellen van de Club van Rome, ecologische modellen en kunstmatige intelligentie. Hiermee is de rij behandelde onderwerpen geenszins uitgeput!
Voor wie is het boek bestemd? Het oorspronkelijke Engelse boek blijkt vooral geapprecieerd te worden als tekst voor Amerikaanse studenten aan colleges die een studie volgen in wat wij α- en γ-richtingen noemen. De uitgevers van de Nederlandse vertaling verwachten dat het boek gebruikt zal worden door docenten computerkunde en informatica aan universiteiten en instellingen van hoger- en middelbaar beroepsonderwijs als een inleiding tot de informatica. Uw recensent vindt dat dit boek bruikbaar is in alle onderwijssituaties waarin studenten of leerlingen een allereerste kennismaking met computers geboden wordt, en verder bij het onderwijs in het nieuwe vakgebied wetenschap en samenleving. De vertaling is goed gelukt en het boek prikkelt de nieuwsgierigheid, ook al is het niet in alle opzichten geschikt voor zelfstudie. Een docentenhandleiding en transparanten zijn eveneens bij de Nederlandse uitgever beschikbaar.

A. Ollongren

Krafft, O., *Lineare statistische Modelle und optimale Versuchspläne*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1978. 449 blz., DM 45,–.

De toegepast statisticus verkeert dikwijls in de volgende situatie: hij(zij) wordt geconsulteerd door een onderzoeker, die zijn(haar) waarnemingen verwerkt wil hebben. Feitelijk had de onderzoeker de statisticus al eerder moeten raadplegen. Een goede onderzoeker neemt kontakt op met de statisticus vóór hij gaat waarnemen en in onderling overleg stellen zij een plan op wat, hoe en hoeveel er waargenomen gaat worden.
Bovenstaande geeft ons een criterium om boeken over statistiek te onderscheiden. Namelijk als eerste categorie de boeken die zich alleen bezig houden met het verwerken van waarnemingen. Vele studieboeken behoren tot deze categorie. Binnen deze categorie kan het niveau waarop wiskunde wordt bedreven aanzienlijk verschillen. De tweede categorie bestaat uit het boek waarin (ook) aandacht wordt besteed aan het opzetten van experimenten.
Het boek van Krafft behoort tot deze tweede categorie. In de eerste vier hoofdstukken (te weten 230 bladzijden) wordt de theorie van de lineaire modellen behandeld. In de laatste drie hoofdstukken worden optimaliteitscriteria voor het opzetten van experimenten besproken.
Er bestaan niet veel boeken die deze stof behandelen. Wel zijn er, in de afgelopen jaren, vele artikelen over dit onderwerp verschenen. Veel van deze gepubliceerde resultaten staan in dit boek vermeld. Daarom is het een bruikbaar boek bij kolleges over dit onderwerp en een welkome aanwinst voor elke instituutsbibliotheek.

J. L. Mijnheer

Prof. dr. R. J. Lunbeck, *Inleiding programmeren*, 112 blz. ƒ14,–, 1978, Academic Service, Den Haag.

Er is een tijd geweest dat bijna iedere docent informatica bij het wetenschappelijk onderwijs een eigen inleiding tot het programmeren samenstelde ten behoeve van de studenten in de wiskunde of andere vakken waar de informatica was ingebed. Enkele van de syllabi zijn later omgewerkt in boekvorm verschenen; zo ook de onderhavige inleiding. Uw recensent zal zich niet wagen aan het trekken van vergelijkingen tussen de verschillende beschikbare teksten (in de Nederlandse taal alleen al zijn er tenminste een half dozijn beschikbaar) en zich beperken tot de constatering dat Prof. Lunbeck's boek een zeer bruikbare inleiding is tot de leer van het opstellen van programma's voor rekenautomaten.
Na een inleiding waarin onder meer de plaats van het programmeren in de informatica wordt uiteengezet en waarin iets over computers en algoritmen wordt gezegd, volgen zes hoofdstukken waarin de verschillende concepten die bij het opstellen van programma's een rol spelen, systematisch worden behandeld. Daarvoor wordt een ontwerptaal gebruikt, die zeer dicht staat bij enkele bekende programmeertalen. Algol 60 en Pascal (zie ook de *cursus Algol* 60 van Prof. dr. A. van der Sluis en drs. C. A. C. Geurts resp. *Inleiding programmeren in PASCAL* van C. van de Wijgaart, eveneens bij Acad. Service te Den Haag verschenen). De syntaxis van de ontwerptaal wordt eveneens gegeven, en wel in de appendix in de vorm van syntaxis diagrammen. Deze zijn echter zo verkleind weergegeven dat alleen jonge ogen daar veel profijt van kunnen hebben.
Aan de hand van veel voorbeelden komen aan de orde procedures, soorten van opdrachten, blokken, structuren en besturingsstructuren. In het laatste hoofdstuk wordt aandacht geschonken aan programmacorrectheid, de syntaxis en de semantiek van programmeertalen. Deze onderwerpen worden slechts summier behandeld, maar het is een goede gedachte geweest ze op te nemen, omdat daarmee enig relief gegeven wordt aan het voorafgaande.
Summa summarum, een goede inleiding die uw recensent ook kan aanbevelen voor wiskunde docenten bij het VWO die een eerste kennismaking met het onderwerp zoeken.

A. Ollongren

Bauer, H. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masztheorie*, 3. neubearbeitete Auflage. Walter de Gruyter – Berlin-New York 1978. 408 blz., DM 48,–.

Tien jaar na het verschijnen van de eerste druk is dan nu de derde druk verschenen. Vergeleken met de tweede druk (verschenen in 1973) zijn fouten verbeterd en waar mogelijk bewijzen doorzichtiger gemaakt en zonodig aanvullingen gegeven. Globaal gezien dus niet zulke grote verschillen met de tweede druk.
Daar uw recensent niet weet of eerdere edities in dit blad besproken zijn volgt nog een (korte) beoordeling. Bauer geeft een heel degelijke inleiding in de maattheorie en waarschijnlijkheidsrekening. Daarbij valt het op dat het vier hoofdstukken bevat, waarvan 1 en 3 aan maattheorie zijn gewijd. Door zijn opzet kan het als studieboek bij een eerste kennismaking met de waarschijnschijnlijksheidsrekening gebruikt worden. Maar dit betekent zeker niet dat het een eenvoudig boek is.

J. L. Mijnheer

Mededelingen

Jaarlijkse studiedag van de N. V. v. W. L.

Motto: *'het zijn de (kleine) dagelijkse dingen die het h'm doen'*
Tijdstip: zaterdag 27 oktober 1979 van 10.00 tot omstreeks 17.00 uur
Plaats: het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, De Uithof, Utrecht

Programma:

9.30 uur Ontvangst en koffie
10.00 uur Huishoudelijk deel, waarin de jaarrede van de voorzitter
10.30 uur Inleiding over het motto van de dag door Harrie Broekman
11.00 uur Thema-groepen
1. Het teruggeven en bespreken van een proefwerk o.l.v. Francis Meester en Jaap Vedder
2. Blikwisseling o.l.v. Gerard Doevedans en Joop van Dormolen
3. De geodriehoek o.l.v. Ben Knip en George Schoemaker
4. Merkwaardige produkten en ontbinden in faktoren o.l.v. Carlo Hollman en Hans Pouw
5. Kleine redeneringen o.l.v. Harrie Broekman en Leo Muskens

12.30 uur Lunch
13.30 uur 'Twee vertellingen over π'
Lezing door Jan Hogendijk
14.15 uur Thema-groepen
16.00 uur Huishoudelijk deel: rondvraag en sluiting

Toelichting bij de verschillende thema-groepen

Ad 1 Het teruggeven en bespreken van een proefwerk.
In groepjes willen wij – mede naar aanleiding van de volgende stellingen – praktisch bezig gaan en discussiëren over de lasten en de lusten van het 'proefwerk teruggeven'.
1. Aan het teruggeven en het bespreken van een proefwerk, kan men de manier van omgaan met de leerlingen en de onderwijsdoelen van een leraar aflezen.
2. Het voorlezen van cijfers van een proefwerk, streelt de goeden en straft de zwakken.
3. Het teruggeven van een proefwerk gebeurt voor de leerling, het bespreken is voor de leraar.
4. Men kan het werk veel beter aan het eind van het uur teruggeven, dat voorkomt en geeft veel onrust.
5. Gelukkig liggen bovenstaande stellingen niet zo vast, als de cijfers die wij, leraren, aan leerlingen voor hun proefwerk geven.

Ad 2 Blikwisseling
In veel gevallen wordt het oplossen van een probleem in de hand gewerkt door de manier waarop het wordt gesteld. De tekst van de opgave suggereert de oplossingsmethode.
Er zijn ook problemen die pas opgelost kunnen worden als de probleemsituatie net even van een andere kant wordt bekeken, die niet zo voor de hand ligt. Dat willen we in navolging van Freudenthal blikwisseling noemen.
Veel leerlingen ervaren blikwisseling als een handige truc van de leraar, die zij 'toch nooit kunnen leren'. We vinden dat niet alleen jammer, maar ook onnodig. Mensen kunnen een houding krijgen waarbij zij blikwisseling als een van de methoden voor het oplossen van problemen beschouwen, die ook zijzelf bewust kunnen (leren) toepassen. We vinden dat we er in het wiskunde-onderwijs naar moeten streven onze leerlingen zo'n houding aan te leren.

Op de studiedag willen we aantonen, dat dat kan aan de hand van doodgewone sommetjes, die elke leerling op school moet leren oplossen.

Ad 3 Het gebruik en de misbruik van de geodriehoek
Op deze bijeenkomst willen we ervaringen uitwisselen over het gebruik van de geodriehoek. (Toegang tot deze sectie op vertoon van geodriehoek) en praten over een didaktiek voor het aanleren van het hoekbegrip.

Stelling 1
Het gebruik van de geodriehoek in de eerste maanden van de brugperiode is als het hanteren van een ingewikkeld padvindersmes uitsluitend voor het schillen van onbespoten appels.

Stelling 2
De geodrichoek is op vele plaatsen in en buiten het wiskunde-onderwijs zinvol te gebruiken, maar nu net niet bij het aanleren van het hoekbegrip.

Ad 4 Merkwaardige produkten; ontbinden in faktoren
Een onderwerp dat door iedere wiskundeleraar nu eenmaal behandeld moet worden. Het is in de praktijk alleen zo moeilijk om een onderwerp als dit te rijmen met al die leuke instapproblemen en ideeën over maatschappelijk relevant wiskunde-onderwijs.
Ook wij vinden dit erg moeilijk, maar zien dat juist als een reden om er mee aan de gang te gaan. Met een groepje leraren willen we graag verschillende aanpakken bekijken. Vervolgens een speciale aanpak gezamenlijk uitproberen en ten slotte middels een gesprek zicht proberen te krijgen op de mogelijke voor- en nadelen.

Ad 5 Kleine redeneringen
(a) '*Kleine redeneringen*' zijn soms zo '*alledaags*' dat we ze makkelijk over het hoofd zien.
(b) '*Alledaagse redeneringen*' zijn soms zo '*klein*' dat we ze makkelijk over het hoofd zien.
(c) '*Dagelijkse redeneringen*' zijn nogal eens een na-denken (ordenen, verwoorden, etc.) van een doe-aktiviteit.
(d) '*Dagelijkse redeneringen*' hebben vaak met '*bewijzen*' gemeen dat ze willen overtuigen.

Het is nogal wiedes dat we in de groep – o.a. via voorbeelden vanuit de wiskundeles – met geïnteresseerden een gesprek willen voeren over en rond deze uitspraken.

Algemeen
1 De deelnemers dienen zich – na de inleiding – te verdelen over de verschillende themagroepen. Na de middaglezing worden de themagroepen opnieuw gestart. Het is de bedoeling dat iedereen dan in een andere groep dan 's ochtends deelneemt aan het werk.
2 Opgave voor de gemeenschappelijke lunch d.m.v. overschrijving van *f* 7,50 op postgiro 143917 t.n.v. Ned. Ver. voor Wiskunde Leraren te Amsterdam; uiterlijk *13 oktober 1979.*

de didaktiekcommissie

In verband met het inbinden van exemplaren Euclides zoek ik
53e jaargang 1977/1978 no. 5.
Is er iemand, die me er aan kan en wil helpen?
Uiteraard tegen overeen te komen beloning.

mevrouw J. Jansen-Waterloo, Mendelssohnstraat 10
Zwolle tel.: 05200-3 84 52

INHOUD:

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, postbus 513,
5600 MB Eindhoven.

H. Freudenthal, F. Schubertstraat 44, 3533 GW Utrecht.

J. de Lange, IOWO, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

S. P. van 't Riet, Schouw 18, 1261 LG Blaricum.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.